

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224666

UNIVERSAL
LIBRARY

سلسلہ شریعت اسلامیہ

صغاری احصاء

جلد اول

تصنیف

ہوریں لمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی، ایس سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے وکشن چند ایم۔ اے

پروفیسر ان کلمیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۴۷ھ م ۱۳۲۸ھ ف م ۲۹ ۱۹۷۶ء

دارالافتاء اسلامیہ پاکستان

یہ کتاب سرزمینِ اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کر کے
طبع و شایع کی گئی ہے

دیباچہ (ارمُصنّف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصائے ان حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو ماتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔ ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فا}$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جائیگا کچھ مستحقِ مہمکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن یہ کہنا بیجا نہ ہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصائے کے تعلق سے مد نظر

کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔
 لاتینائی سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور مکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل
 میں لائی گئی ہیں پہلی مشاعتوں میں ان سوالوں پر یکساں استدقاق کے نظریہ کی
 مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی، احصا کی کتاب میں اسوقت اس نظریہ
 کا داخل کر لینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا
 لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہو گیا
 وجہ سے اب اسکو ترک کر دیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے
 جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں
 سے طالب علم کو واسطہ پڑے گا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج
 تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکوزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں
 اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف
 کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط
 جون ۱۹۱۹ء

ہورس لیب

فہرست مضامین

صفحہ	مضمون	صفحہ
	پہلا باب	
	سلسلہ تفسیر منہا	۱
۱	توانہ کی علوی یا سفلی انتہا	۲
۳	لامتناہی سلسلوں پر استعمال - مثبت رقموں والے سلسلے	۳
۷	توانہ میں انتہائی قیمت -	۴
۱۰	لامتناہی سلسلوں پر استعمال	۵
۱۵	تفاعل کی عام تعریف	۶
۲۰	تفاعلوں کی ہندسی تعبیر	۷
۲۲	سلسلہ تفاعل کی تعریف	۸
۲۴	سلسلہ تفاعل کی خاصیت	۹
۲۵	سلسلہ تفاعل کی ترکیب	۱۰
۲۷	عدم تسلسل	۱۱
۲۹	سلسلہ تفاعل سے متعلق مسائل	۱۲
۳۱	جبری تفاعل - منطق صحیح تفاعل	۱۳
۳۲	منطق کسری	۱۴

۱۴۲	اعظم اور اقل قیمتیں	۵۱
۱۴۹	جبر پہ طریقت	۵۲
۱۵۱	متعدد متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں	۵۳
۱۵۲	تفروقوں کی ترتیم	۵۴
۱۵۴	چھوٹی تصبیحات کا محسوب کرنا	۵۵
۱۵۶	اوسط قیمت کا مسئلہ - نتائج	۵۶
۱۶۰	متعدد متغیروں والے تفاعل کا پورا تفسیر	۵۷
۱۶۳	چھوٹی تصبیحات میں استعمال	۵۸
۱۶۵	تفاعلوں کے تفاعل کا تفروق اور تصمیعی تفاعلوں کا تفروق	۵۹
۱۶۶	مشق تفاعل کے ہندسی استعمال - کارٹیری محدود	۶۰
۱۶۹	ایک متبدل کی رقوم میں محدود -	۶۱
۱۷۰	منتخبی کے کسی نقطہ پر کے ماس اور عباد کی مساواتیں	۶۲
۱۷۳	قطبی محدود	۶۳
۱۷۷	امثلہ نمبری ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰	
<h2>پانچواں باب</h2> <h3>اعلیٰ رتبہ کے مشتقات</h3>		
۱۹۵	تعریف - ترتیم	۶۴
۱۹۸	حاصل ضرب کے متواتر مشتقات - لیب نیز کا مسئلہ	۶۵
۲۰۰	حرکیات کی مثالیں	۶۶
۲۰۲	تقعر اور تحدب - نقاط انعطاف	۶۷
۲۰۵	اقل اور اعظم قیمتوں میں مشق کا استعمال	۶۸
۲۰۶	مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات	۶۹
۲۰۷	رد سے متعلق کی ہندسی تعبیر	۷۰
۲۱۲	اجزائے متناسب کا نظریہ	۷۱
۲۱۴	امثلہ نمبری ۲۱، ۲۲	

پہلا باب

تسل

۱۔ سلسل تغیر
 صفاری احصا کے ہر مسئلہ میں ہمیں مقداروں کی ایک نہ ایک تعداد سے واسطہ پڑتا ہے، ان میں سے بعض مستقل ہو سکتی ہیں اور باقی تغیر بھی جاتی ہیں اور (مزید بریں) سلسل تغیر کو قبول کرتی ہیں۔
 مثلاً ہندسہ کے مسئلوں میں زیر بحث مقداریں طول، زاوے، رقبے، حجم وغیرہ ہو سکتی ہیں۔ حرکیات میں یہ مقداریں کمیتیں، اوقات، رفتاریں، قوتیں وغیرہ ہو سکتی ہیں۔
 جبر و متقابلہ کے ذریعہ اس قسم کی کسی مقدار کو ایک حرف سے تعبیر کرتے ہیں مثلاً Δ یا Δ جس سے وہ نسبت مفہوم ہوتی ہے جو اس مقدار کو اسی قسم کی ایک معیاری یا اکائی مقدار سے ہے۔ یہ نسبت ایک صحیح عدد ہو سکتی ہے یا ایک کسر یا ایک عدد متباہن جس سے مراد یہ ہے کہ ایسے عدد کو کسی ایسی کسر سے تعبیر نہیں کر سکتے جس کا شمار کنندہ و نسب نما دونوں محدود صحیح اعداد ہوں۔ تاہم ایسی تباہن مقدار کے لئے جو حرف استعمال کیا جائے اس پر جبر و متقابلہ کے تمام معمولی قوانین جاری ہو سکتے ہیں۔
 مستقل مقدار کسی دے ہوئے عمل میں وہ مقدار ہوتی ہے جو اپنی قیمت

نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار جو کسی دے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہے، تغیر کہلاتی ہے۔ حروف ابجدی حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، ... کو ہم عام طور پر مستقل مقادیر کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف 'د'، 'ھ'، 'لا'، 'نا'، 'ی' کو تغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کریں گے۔

بعض مقادیر اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں مثلاً طول، کمیت، کثافت وغیرہ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہیں مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار کی مطلق قیمت سے بلا لحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو ہم دو چھوٹے انقباضی خطوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

|| 'ا' جب لا | 'لوک | لا |

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر 'ا' اور 'ب' ہم علامت ہوں تو

| 'ا' + 'ب' = | 'ا' | + | 'ب' |

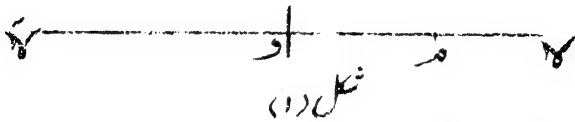
لیکن جب وہ مختلف علامت ہوں تو

| 'ا' + 'ب' > | 'ا' | + | 'ب' |

صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً مخنیوں کے ماس کھینچنا، مخنیوں کے طول اور رقبے معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھ کر ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کر لیا جائے اور ساتھ ہی ساتھ ان جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں واضح یا ضمنی طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقادیر کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح عامل ہو سکتی ہے۔ ایک لائن یا ہی خط مستقیم کا 'لا' 'لو' اس میں ایک ثابت مبدا و مقرر کردہ اور نیز بحث

مختلف مقداروں کے متناسب کسی متناسب پیمانہ پر طول و عرض پانچ بے علامت مقدار (مثلاً کیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب لینا چاہئے لیکن ایسی صورتوں میں یہاں مقدار کی ظاہری مختلف ہوں و و کے سیدھے یا بائیں جانب کھینچنا چاہئے موجب اس کے کہ تعبیر کھانے والی مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں لکھلا میں ایک خاص نقطہ ہو لیگا۔



جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ ہر خط لکھلا میں ایک خاص وسعت (جو دیکھا جاسکتی ہے) کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔ یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں کو اصول ہر موعود کے طور پر بیان کیا ہے یعنی اس قسم کی ہر قسم کی مقدار خط لکھلا کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور (برعکس اس کے) ایک خاص وسعت کے اندر خط پر کام ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقدار کی ان تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے متعلق ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ تمام مقداریں لحاظ اپنی تخصیص کے بالمرست یا بالواسطہ خطی مقدار سے تعلق رکھتی ہیں۔ مثلاً قریب ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک دئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رفتار اس طول سے تعبیر ہو سکتی ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علیٰ ہذا القیاس۔

۲۔ تو اتر کی غلوی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا انتہائی قیمت کا تخیل مختلف صورتوں میں احصاء کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم

نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار جو کسی دے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں اختیار کرتی ہے، متغیر کہلاتی ہے۔ حروف تہجی کے ابتدائی حروف 'ا'، 'ب'، 'ج'، ... کو ہم عام طور پر مستقل مقادیر کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف 'د'، 'ڈ'، 'ڈھ'، 'ڈھا'، 'ای' کو متغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کریں گے۔

بعض مقداریں اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں مثلاً طول، کمیت، کثافت وغیرہ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہیں مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار کی مطلق قیمت سے بلا لحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو ہم دو مجموعے انتہائی خلوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

|| 'ا' جب لا | 'لوک | لا |

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر 'ا' اور 'ب' ہم علامت ہوں تو

| 'ا' + 'ب' = | 'ا' | + | 'ب' |

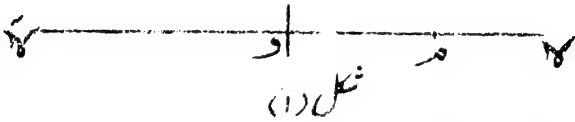
لیکن جب وہ مختلف علامت ہوں تو

| 'ا' + 'ب' > | 'ا' | + | 'ب' |

صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً مخنیوں کے ماس کیفینہ، مخنیوں کے طول اور رقبے معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھ کر ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کر لیا جائے اور ساتھ ہی ساتھ ان جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں واضح یا ضمنی طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقادیر کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک لائن یا خط مستقیم کا 'لا' 'لو' اس میں ایک ثابت مبدا و مقرر کردہ اور زیر بحث

مختلف مقداروں کے متناسب کسی متناسب پیمانہ پر طول و عرض پانچ بے علامت
مقادیر (مثلاً کیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب
لینا چاہئے لیکن ایسی صورتوں میں جہاں مقادیر کی طاقتیں مختلف ہوں و
کو و کے سیدھے یا بائیں جانب لکھنا چاہئے بموجب اس کے کہ تعبیر کچانے والی
مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں کلا
میں ایک خاص نقطہ ملے گا۔



جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارے
یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ ہر خط کلا میں ایک خاص وسعت (جو دبھا سکتی)
کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔
یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں
کو اصول ہر موعود کے طور پر بیان کیا ہے یعنی اس قسم کی ہر قسم کی مقدار خط کلا
کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور ہر قسم اس کے ایک خاص وسعت
کے اندر خط پر کام ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقدار کی ان
تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے
متعلق ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہو گا کہ یہ تمام
مقداریں لحاظ اپنی تخصیص کے بالواسطہ یا بالواسطہ خطی مقدار سے تعلق رکھتی
ہیں۔ مثلاً قریب ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک
دئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رفتار اس طول سے تعبیر ہو سکتی
ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علیٰ ہذا القیاس۔
۲۔ تو اتر کی غلوئی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا انتہائی قیمت کا تخیل مختلف
صورتوں میں احصاء کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت
رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم

کے ہر نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔ پس کوئی نقطہ ضرور ہونا چاہیے
ایسا کہ ہر کے بائیں جانب کے تمام نقطے اول الذکر جماعت سے متعلق ہوں اور
اس کے دائیں طرف کے نقطے مؤخر الذکر جماعت سے۔ پس اگر ہم $ص = د$ و
کہیں تو $ص$ متذکرہ بالا طوسی انتہا کی تعریف کو پورا کرتا ہے۔
اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لامتناہی نزولی نوا تر

(۳) '۱' '۲' '۳'

ہو یعنی ہر مقدار اپنی پہلی مقدار سے کم ہو اس طور پر کہ فرق

لا - لا ، لا - لا ، لا - لا

تمام مثبت ہوں اور تمام مقدر ایسے کسی محدود مقدار ب سے تجاوز ہوں تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک سفلی انتہا نہ کا وجود ہوگا اس طرح یہ کہ توازن کی ہر مقدار نہ سے بڑی ہوگی حالانکہ توازن کے ارکان کسی مقررہ مقدار سے جو نہ سے بڑی ہے آخر الامر کم ہو جائیں گے۔

۴ استدلال بالاصریحاً اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ تواتر کی دویا دو سے زیادہ متبادل مقداریں مساوی ہوں۔ اس صورت میں بھی تواتروں کو علی الترتیب صعودی یا نزولی کہا جاسکتا ہے اگرچہ کہ نہ گھٹنے والا یا نہ بڑھنے والا کہنا زیادہ صحیح ہوگا۔

نوٹ، حال میں انگریزی اصطلاح (Monotonic) وضع ہوئی ہے جس میں دونوں طرح کے تواتر شامل ہوتے ہیں ان تواتروں کو ٹیکنائٹ کہا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ تواتر

$$(3) \dots\dots\dots \frac{\dot{0}}{1+\dot{0}} \dots\dots\dots \frac{\dot{1}}{2} \quad \frac{\dot{2}}{3} \quad \frac{\dot{3}}{4} \quad \frac{\dot{4}}{5}$$

صعودی ہے اور اس کی علوی اتہا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{1}{1+n} - 1 = \frac{n}{1+n}$$

۳۰

ن کو کافی بڑائی سے اس کو ۱ کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔
مثال ۲۔ اگر لا ایک مثبت مقدار ایک سے کم ہو تو مقادیر

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots (5)$$

ایک نزولی تو اتر جاتی ہیں جس کی سفلی انتہا صفر ہے۔ کیونکہ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ایک سے بڑا ہے اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{n}$$

جہاں ما مثبت ہے۔ تب سلسلہ ثنائی سے

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(n)} = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

پس

$$\frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$$

اور اس لئے ن کو کافی بڑائی سے اسے اتنا بڑا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا انتہا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔
مثال ۳۔ ایسے تو اتر پر غور کریں

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots (6)$$

$$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots (7)$$

اس لئے

$1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots$ سے بڑا ہوگا اگر $1, 1', 1'', \dots, 1^{(n)} \dots$ سے بڑا ہے لیکن لام صریحاً
اسے بڑا ہے۔ اس لئے تو اتر صعودی ہے۔ پھر

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{1}{1+\lambda_n} + 1 > \frac{1+\lambda_n}{1+\lambda_n} > \frac{1+\lambda_n}{1+\lambda_n} = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$$

اور چونکہ $\lambda_n < 1$ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ n کی تمام قیمتوں کے لئے $\lambda_n > 1$ اس لئے توانر کی ایک علوی انتہا ہے۔ اس کو m سے تعبیر کریں تو (۶) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ m مساوات

$$(۹) \dots\dots\dots 1 + \lambda = \lambda^2$$

کی مثبت اصل ہے۔

(۶) سے علی طور پر محسوب کرنے سے سلسلہ کے پہلے چند ارکان چار ہندسوں تک

$$1, 1.5712, 1.5598, 1.5552, 1.5712, 1.5718$$

حاصل ہوتے ہیں۔ آخر میں لکھا ہوا عدد مطلوبہ تقرب کے درجہ تک m کی صحیح قیمت ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \lambda^2 = 1 + \lambda$$

کی ترسیمات سے اس سوال کو ترسیمی طور پر تعبیر کیا جاسکتا ہے

شکل سے ظاہر ہے کہ (۶) سے حاصل شدہ λ_n کی متواتر قیمتیں کس طرح نقطہ تقاطع پر λ کی قیمت کی طرف

مستند ہوتی ہیں۔ ترسیم کا صرف ایک حصہ دکھایا گیا ہے۔

صریحاً ہم اسی نتیجہ پہنچیں گے اگر λ کے بجائے λ کی کسی

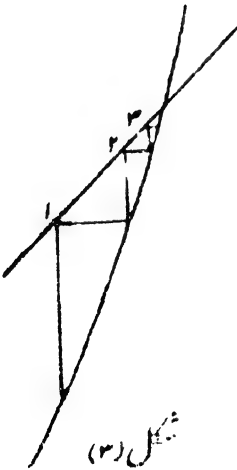
مثبت قیمت سے ہم ابتداء کریں۔ اگر λ (۹) کی مثبت

اصل سے بڑا ہو تو صرف اس صورت میں توانر نزولی ہوگا

طریقہ بالا کا استعمال مساواتوں کے عددی حل دریافت

کرنے میں بہت وسیع ہے خواہ مساواتیں جبری ہوں یا اولیائی۔

۳۔ لامتناہی سلسلوں پر استعمال مثبت رقموں والے سلسلے



مذکورہ بالا مسئلہ احصا کو بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے۔ لامتناہی سلسلوں کے نظریہ سے جنگی تمام زمیں ہم علامت ہوں اسکی اچھی توضیح ہوتی ہے۔ درحقیقت لامتناہی سلسلے کی ارقام کا مجموعہ بے معنی چیز ہے کیونکہ جن اعمال پر مشتمل ہے وہ کبھی پورے نہیں ہو سکتے۔ لیکن ایک خاص شرط کے تحت ایک مخصوص مقدار کی تعریف ایک سلسلے سے ہو سکتی ہے۔

سلسلہ

(۱) $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$ پر غور کرو جس کی تمام ارقام مثبت ہیں اور فرض کرو کہ

(۲) $س_۱ = ع_۱, س_۲ = ع_۱ + ع_۲, \dots, س_n = ع_۱ + ع_۲ + \dots + ع_n + \dots$ ان مقداروں کو ہم ”جزوی مجموعے“ کہیں گے۔ اگر تو اتر

(۳) $س_۱, س_۲, \dots, س_n, \dots$ کی علوی انتہا $س$ ہو تو سلسلہ (۱) کو ”مستق“ کہتے ہیں۔ اور مقدار $س$ کو عام طور پر اس سلسلہ کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔ پھر اگر (۱) مثبت ارقام کا ایک ایسا سلسلہ ہو جس کا مستق ہونا معلوم ہے اور اگر

(۴) $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_n + \dots$ مثبت ارقام کا ایک دوسرا سلسلہ ہو جس کی ارقام سلسلہ (۱) کی متناظر ارقام سے چھوٹی ہیں یعنی $ع_n > ع_n$ کی تمام قیمتوں کے لئے تو (۴) بھی مستق ہوگا۔ کیونکہ اگر $س_n$ (۴) کی پہلی n تقوں کا مجموعہ ہو تو $س_n > س_n$ اور بموجب فرض چونکہ مقادیر $س_n$ کی علوی انتہا ہے اس لئے مقادیر $س_n$ کی بھی ایک علوی انتہا ہوگی۔

سب سے پہلے یہ واضح ہے کہ اگر تواتر (۱) کی انتہا ہے تو n کی ایک قیمت ہمیشہ معلوم کیا جاسکتی ہے اس طرح کہ سلسلہ کے ارکان جو n کے بعد آتے ہیں یعنی

$$n+1, n+2, n+3, \dots, n+b, \dots, n$$

سے اس قدر فرق

رکتے ہیں جو b سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں b کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ برعکس اس کے اگر یہ شرط پوری ہو تو سلسلہ کی ایک معین انتہا ہوتی ہے۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے پہلے ہم ایک ایسا نزولی تواتر بناتے ہیں جو مثبت مقادیر b, b, b, \dots پر مشتمل ہے اور جس کی انتہا صفر ہے۔ اس قسم کا تواتر بنایا جاسکتا ہے مثلاً ہر رکن کو اپنے پہلے رکن کا نصف لینے سے۔ یہ وجہ فرض ایک عدد n معلوم کیا جاسکتا ہے ایسا کہ سلسلہ کے تمام ارکان جو n کے بعد آتے ہیں قیمتوں

$$b = n - b, \quad b = b + n, \quad b = n + b$$

کے درمیان واقع ہوتے ہیں اسی طرح ایک عدد n ($n < n$) معلوم کیا جاسکتا ہے ایسا کہ تمام ارکان جو n کے بعد آتے ہیں $b = n - b$ اور

$$b = n + b$$

کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ پس n کے بعد آنیوالے

تمام ارکان ایک خاص وقفہ میں واقع ہوتے ہیں جس کی وسعت (فرض کرو) b سے b تک ہے اور یہ $b = b$ سے b والے وقفہ کے اندر شامل ہے اور اس طرح کا ہے کہ

$$b - b > b + b$$

اور علیٰ ہذا القیاس۔ مقادیر b, b, b, \dots ایک صعودی تواتر بناتی ہیں اور چونکہ وہ تمام b سے کم ہیں اس لئے ان کی ایک علوی انتہا (فرض کرو)

۷۷۷ ہے۔ اسی طرح تعدادیں ۷۷۷، ۷۷۷، ۷۷۷، ایک نزدیکی تواتر بناتی ہیں جبکی
مغلی انتہا ۷۷۷ ہے۔ نیز چونکہ

$$۷۷۷ > ۷۷۷ - ۷۷۷ > ۷۷۷$$

جو اتنا جامع نام ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس لئے انتہائیں ۷۷۷ اور ۷۷۷ مختلف
ہو سکتیں۔ متذکرہ بالا شرط کے ماتحت ۷۷۷ اور ۷۷۷ کی مشترک قیمت تواتر
(۱) کی انتہا ہے۔

مثال ۳۔ کسی حسابی عمل سے ایسی مثال مل سکتی ہے جس میں ایک نتیجہ تواتر تقریباً
کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے جبکہ تقریبات حسب معمول طریقہ سے مرتب کئے جائیں
یعنی آخری نمایاں ہندسہ میں اکائی کا اضافہ کر دیا جائے جب کبھی اس کے بعد انویالا
ہندسہ ۵ یا ۵ سے زیادہ ہو۔ مثلاً ۶ کا جذر المربع معلوم کرنے کے عمل سے

$$۲۵۶۳۵۷۵۱۳۰۰۰$$

حاصل ہوتا ہے۔ تواتر تقریب جو طریقہ متذکرہ بالا کے موافق مرتب کئے گئے ہیں

$$۲۵۶۳۵۷۵۱۳۰۰۰، ۲۵۶۳۵۸، ۲۵۶۳۶، ۲۵۶۵، ۲۵۶، ۲$$

$$۲۵۶۳۵۷۵۱۰۰۰$$

میں جن سے زیر بحث قسم کا ایک تواتر حاصل ہوتا ہے۔ جو عدد پہلے عدد کے بعد آئے
ہیں اس جذر سے ۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ دوسرے عدد کے بعد آنے والے اعداد اس
سے ۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ تیسرے عدد کے بعد آنے والے اس سے ۵ سے
کم فرق رکھتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے تواتر کی ایک خاص انتہا ہے۔
مثال ۴۔ ایسے سلسلہ پر غور کرو جس میں

$$(۱) = ۱، (۲) = \frac{۱}{۱+۵}، (۳) = \frac{۱}{۱+۵+۵}، \dots (۵)$$

تمام ارکان مثبت ہیں اور (پہلے رکن کے بعد) اکائی سے کم ہیں نیز یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ
تمام ارکان دو سرے رکن کے بعد $\frac{۱}{۵}$ سے بڑھے ہیں۔ پھر

$$\frac{1}{\frac{1}{1+\alpha} + 1} = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{2+\alpha}$$

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{1}{(1+\alpha)(1+\alpha)} = \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{2+\alpha}$$

اس لئے تواتر کا ہر رکن اپنے پہلے رکن سے باری باری سے بڑا اور چھوٹا ہے۔

مزید براں چونکہ نسبت بالا $\frac{1}{2+\alpha}$ سے کم ہے جبکہ $1 < 1+\alpha$ لہذا متواتر ارکان کے درمیانی وقفے لا انتہائی گتے ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ آسانی حاصل ہوتا ہے کہ تواتر ایک خاص انتہائی طرف مستحق ہونا چاہئے جو صریحاً

$$(۷) \dots\dots\dots 1 + \alpha = 1$$

کی مثبت اصل ہے

(۵) سے فی الحقیقت محسوب کرنے سے ہم

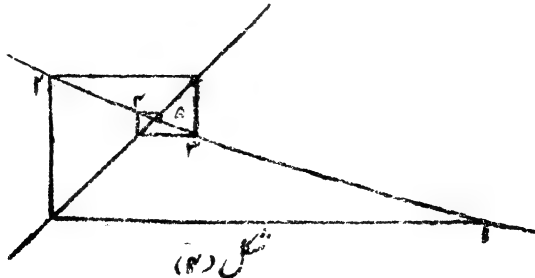
$$1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$$

حاصل کرتے ہیں۔ آخری عدد زیر بحث اصل کی چار ہندسوں تک صحیح قیمت ہے۔

تواتر کی نوعیت تریبی طور پر

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{1}{1+\alpha} = 1$$

کی تریبیوں سے اس طرح واضح کیا جاسکتی ہے۔



نفل میں ترسیم کا ضروری حصہ دکھایا گیا ہے۔

اس مثال میں اور دفعہ (۲) کی مثال (۳) میں تقرب کے ایسے طریقہ کی ہم نے سادہ مثالیں دی ہیں جو دو شخصوں کے تقاطع سے متعلق ہیں۔ یہ طریقہ اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔ استدقاق بظہی ہوگا اگر شخصوں کے میلان محور لا کے ساتھ (ایک ہی یا مخالف سمتوں میں) تقریباً وہی ہوں۔

۵۔ لاستناہی سلسلوں میں استعمال۔

اگر لاستناہی سلسلہ

$$ع_۱ + ع_۲ + \dots + ع_n + \dots \quad (۱)$$

میں جسکی ازقام کا ہم علامت ہونا مشروط نہیں ہے ہم

$$س_۱ = ع_۱، س_۲ = ع_۱ + ع_۲، \dots، س_n = ع_۱ + ع_۲ + \dots + ع_n، \dots$$

(۲)

لکھیں اور اگر تو اتر

$$س_۱، س_۲، س_۳، \dots، س_n، \dots \quad (۳)$$

کی انتہائی قیمت $س_n$ ہو تو سلسلہ کو 'ستدق' کہا جاتا ہے اور $س_n$ کو اس کا مجموعہ کہتے ہیں۔

دفعہ (۲) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱) کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ایک عدد n کا معلوم کرنا ممکن ہو اس طرح کہ جزوی

$$\text{مجموعہ } س_n، س_{n+1}، س_{n+2}، \dots، س_{n+p}، \dots \text{ تمام } س_n$$

سے استقدرق رکھیں جو حصہ سے کم ہو جہاں حصہ کوئی اختیار می مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔

موجودہ بحث سے متعلق ایک اہم سلسلہ یہ ہے کہ اگر سلسلہ

مثال - سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

۱ اور ۱- کے درمیان ایک انتہائی طرف مستغرق ہوتا ہے۔
یہ سلسلہ اتفاقاً مستغرق جماعت سے متعلق ہے۔ آئندہ یہ بتلایا جائیگا (صفحہ ۱۰۵) کہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ن کو کافی بڑھانے سے اس قدر بڑا بنایا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔
یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ لامتناہی سلسلوں سے متعلق جو لفظ مجموعہ ہم نے استعمال کیا ہے وہ بالکل وضعی حیثیت رکھتا ہے اور یہ کہ ہم اس معاملہ میں آزاد نہیں ہیں کہ بغیر جانچ کے اس طرح کے سلسلہ کو اس طور پر استعمال کریں جیسے ایک جملہ کو استعمال کیا جاتا ہے جو ارقام کی محدود تعداد پر مشتمل ہو۔
مثلاً ہمیں یہ نہیں مان لینا چاہئے کہ رقموں کی ترتیب کو بدل دینے سے مجموعہ نہیں بدلتا۔ مطلقاً مستغرق سلسلہ کی صورت میں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ مفروض جائز ہے لیکن اتفاقاً مستغرق سلسلہ میں ارقام کی ترتیب کو بدلکر ان کو کسی دوسری مناسب ترتیب میں رکھنے سے سلسلہ کو ہمیں انتہائی طرف مستغرق کرنا چاہیں کر سکتے ہیں۔
ان سلسلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کتابوں میں مل سکتے ہیں۔ اس کتاب میں لکھنے کی چنداں ضرورت نہیں۔
بہر کیف حسب ذیل سادہ مسائل کا اکثر حوالہ دیا جائیگا۔

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{6n} + \dots + \frac{1}{8n} + \dots + \frac{1}{10n} + \dots + \frac{1}{12n} + \dots + \frac{1}{14n} + \dots + \frac{1}{16n} + \dots + \frac{1}{18n} + \dots + \frac{1}{20n} + \dots + \frac{1}{22n} + \dots + \frac{1}{24n} + \dots + \frac{1}{26n} + \dots + \frac{1}{28n} + \dots + \frac{1}{30n} + \dots + \frac{1}{32n} + \dots + \frac{1}{34n} + \dots + \frac{1}{36n} + \dots + \frac{1}{38n} + \dots + \frac{1}{40n} + \dots + \frac{1}{42n} + \dots + \frac{1}{44n} + \dots + \frac{1}{46n} + \dots + \frac{1}{48n} + \dots + \frac{1}{50n} + \dots + \frac{1}{52n} + \dots + \frac{1}{54n} + \dots + \frac{1}{56n} + \dots + \frac{1}{58n} + \dots + \frac{1}{60n} + \dots + \frac{1}{62n} + \dots + \frac{1}{64n} + \dots + \frac{1}{66n} + \dots + \frac{1}{68n} + \dots + \frac{1}{70n} + \dots + \frac{1}{72n} + \dots + \frac{1}{74n} + \dots + \frac{1}{76n} + \dots + \frac{1}{78n} + \dots + \frac{1}{80n} + \dots + \frac{1}{82n} + \dots + \frac{1}{84n} + \dots + \frac{1}{86n} + \dots + \frac{1}{88n} + \dots + \frac{1}{90n} + \dots + \frac{1}{92n} + \dots + \frac{1}{94n} + \dots + \frac{1}{96n} + \dots + \frac{1}{98n} + \dots + \frac{1}{100n} + \dots$$

ایک مستغرق سلسلہ ہو جس کا مجموعہ ۱ ہے تو سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{6n} + \dots + \frac{1}{8n} + \dots + \frac{1}{10n} + \dots + \frac{1}{12n} + \dots + \frac{1}{14n} + \dots + \frac{1}{16n} + \dots + \frac{1}{18n} + \dots + \frac{1}{20n} + \dots + \frac{1}{22n} + \dots + \frac{1}{24n} + \dots + \frac{1}{26n} + \dots + \frac{1}{28n} + \dots + \frac{1}{30n} + \dots + \frac{1}{32n} + \dots + \frac{1}{34n} + \dots + \frac{1}{36n} + \dots + \frac{1}{38n} + \dots + \frac{1}{40n} + \dots + \frac{1}{42n} + \dots + \frac{1}{44n} + \dots + \frac{1}{46n} + \dots + \frac{1}{48n} + \dots + \frac{1}{50n} + \dots + \frac{1}{52n} + \dots + \frac{1}{54n} + \dots + \frac{1}{56n} + \dots + \frac{1}{58n} + \dots + \frac{1}{60n} + \dots + \frac{1}{62n} + \dots + \frac{1}{64n} + \dots + \frac{1}{66n} + \dots + \frac{1}{68n} + \dots + \frac{1}{70n} + \dots + \frac{1}{72n} + \dots + \frac{1}{74n} + \dots + \frac{1}{76n} + \dots + \frac{1}{78n} + \dots + \frac{1}{80n} + \dots + \frac{1}{82n} + \dots + \frac{1}{84n} + \dots + \frac{1}{86n} + \dots + \frac{1}{88n} + \dots + \frac{1}{90n} + \dots + \frac{1}{92n} + \dots + \frac{1}{94n} + \dots + \frac{1}{96n} + \dots + \frac{1}{98n} + \dots + \frac{1}{100n} + \dots$$

جو (۱) کی ارقام کو جزو ضربی ۱ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

مجموعہ (س) کی طرف مستحق ہوگا۔ اس کا ثبوت ظاہر ہے۔

۲۔ اگر $س_۱ + س_۲ + + س_n + - (۹)$

اور $س'_۱ + س'_۲ + + س'_n + - (۱۰)$

مستحق سلسلے ہوں جن کے مجموعے علی الترتیب (س) اور (س') ہیں تو سلسلہ

$(س_۱ \pm س'_۱) + (س_۲ \pm س'_۲) + + (س_n \pm س'_n) + - (۱۱)$

جو (۹) اور (۱۰) کی متناظر ارقام کے مجموعوں یا فرقوں پر مشتمل ہے مجموعہ

(س) \pm (س') کی طرف مستحق ہوگا کیونکہ اگر (س) ، (س') علی الترتیب

(۹) اور (۱۰) کی پہلی n رقموں کے مجموعے ہوں تو (۱۱) کی پہلی n رقموں کا

مجموعہ (س) \pm (س') ہوگا۔ اب

$(س_۱ \pm س'_۱) - (س_۲ \pm س'_۲) = (س_۱ - س_۲) \pm (س'_۱ - س'_۲)$

..... (۱۲)

بوجب فرض اگر صہ کوئی اختیاری مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو ہم n کی ایک قیمت معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ اس قیمت اور اس سے اعلیٰ قیمتوں کیلئے

$|س_۱ - س_۲| > \frac{1}{p}$ صہ اور $|س'_۱ - س'_۲| > \frac{1}{p}$ صہ

..... (۱۳)

اور اسلئے $|س_۱ \pm س'_۱ - (س_۲ \pm س'_۲)| > \frac{1}{p}$ صہ (۱۴)

جو اس بات کی شرط ہے کہ (س) \pm (س') کی انتہائی قیمت (س) \pm (س') ہو جائے۔

۳۔ اسی مفروضہ سے سلسلہ

$(س_۱ + س'_۱) + (س_۲ + س'_۲) + + (س_n + س'_n) + - (۱۵)$

مجموعہ + جس کی طرف مستحق ہوگا۔ پچھلے دو سٹلوں سے یہ فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

۶۔ تفاعل کی عام تعریف۔

ایک متغیر مقدار کو دوسری متغیر مقدار کا 'تفاعل' کہتے ہیں جبکہ دوسری چیز میں وہی برقرار رہیں اور موخر الذکر متغیر کی قیمت مقرر کر دی جائے تو اول الذکر متغیر کی قیمت معین ہو جائے۔

اس قسم کا ربط رکھنے والی دو مقداروں میں اس طرح تیسرے کچا جاتی ہے کہ ان کو علی الترتیب 'تابع متغیر' اور 'متغیر متبوع' کہتے ہیں۔

ایک متغیر مقدار کے تفاعل کا تصور ریاضیات کی مختلف شاخوں میں رونما ہوتا ہے۔ مثلاً علم الحساب میں ن اشیا کی ترتیبوں کی تعداد ن کا ایک تفاعل ہے۔ گولیوں کے ایک شناسی یا ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد گولیوں کی اس تعداد کا تفاعل ہے جو قاعدے کے ہر ضلع میں ہوتی ہیں۔ کسی دے ہوئے سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ (مجموع) عدد ن کا تفاعل ہے۔ علی ہذا القیاس۔ اس قسم کی بعض صورتوں میں ضربت تفاعلوں کے لئے ریاضی کے خاص خاص ضابطے ہوتے ہیں لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ تفاعل کے منشاء میں ان کا وجود ضروری نہیں ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس مجموعہ کو خارج کرنے کے لئے ریاضی میں کوئی ٹھیک جملہ موجود نہیں ہے۔ اسی طرح اعداد مغر کی تعداد جو ایک دے ہوئے صحیح عدد ن سے تجاوز نہیں کرتے ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس کو ایک ضابطہ سے تعبیر نہیں کیا جاسکتا۔

ان مثالوں میں متغیر متبوع لمخاط ابھی نوعیت کے صرف محدود طور پر تبدیل ہو سکتے ہیں۔ صفاری احصا میں خصوصاً ایسی صورتوں پر بحث ہوتی ہے جن میں متغیر متبوع و فوراً

معنوں میں سلسل ہو۔ مثلاً ہندسہ میں ایک دائرہ کا رقبہ یا ایک کرہ کا حجم نصف قطر کا ایک تفاعل ہوتا ہے نظری طبیعیات میں ایک گرنے والے ذرہ کا ارتفاع یا رفتار وقت کا ایک تفاعل سمجھی جاتی ہے۔ ایک دیکھو کہ تفاعل کے اتہنا کا دوسرے کا ایک تفاعل دے ہوئے تپش پر ایک دی ہوئی گیس کا باؤٹکنٹ کا ایک تفاعل میر شدہ بمب کا دباؤ تپش کا ایک تفاعل وغیرہ تصور ہوتے ہیں یہاں پر بھی تفاعل کے لئے ریاضی کے ایک جملہ کا وجود یا غیر وجود کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ دو متغیروں کے درمیان تفاعلی ربط قائم کر نیکے لئے صرف یہ ضروری ہے کہ ایک کی قیمت سے دوسرے کی قیمت کا تعین ہو جائے بشرطیکہ دوسری چیزیں غیر متغیر رہیں۔

عام طور پر ہم متغیر متبوع کو (لا) سے اور تابع متغیر کو (ما) سے تعبیر کرینگے۔ ان دونوں کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکو اکثر

ما = ف (لا) یا ما = ف (لا) وغیرہ سے ظاہر کیا جائیگا۔ رمز ف (لا) [(x) ف] سے مراد 'لا' کا کوئی خاص تفاعل ہے۔

جب ایک مقدار ایک قیمت سے دوسری قیمت اختیار کرتی ہے تو یہ نئی قیمت پہلی قیمت سے جس قدر بڑی ہوتی ہے اسکو اس مقدار کا 'اضافہ' کہتے ہیں خواہ یہ مثبت ہو یا منفی۔ اس اضافہ کو ہم اس طرح ظاہر کریں گے کہ متغیر مقدار کے پہلے ہف جو متحد و دو فرق کا اختصار خیال کیا جاسکتا ہے لکھ دیا جائیگا 'انگریزی میں اس علامت کے لئے ہ یا Δ ہے [مف = Δ]۔

مثلاً ہم کہتے ہیں کہ متغیر متبوع لا سے بدلکر لا + مف لا ہو جائے اور اس وجہ سے تابع متغیر ما سے بدلکر ما + مف ما ہو جائے۔

پس اگر ما = ف (لا) (۱)

تو ما + مف ما = ف (لا + مف لا) (۲)

اس لئے مف ما = ف (لا + مف لا) - ف (لا) (۳)

فی الحال اس ترتیم میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ مف لا یا مف ما چھوٹا ہے۔ ربط (۳) پورا ہونے پر اضافوں کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

مثال (۱)۔ اگر $ما = لا^3$ تو جب $لا = ۱۰۰$ ، صف $لا = ۱$ تو

$$صف ما = (۱۰۰)^3 = ۱۰۰۰۰۰۰$$

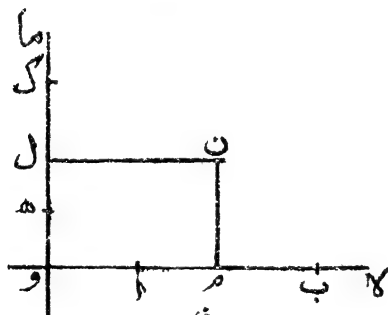
مثال (۲)۔ اگر $ما = جب لا^3$ تو اگر $لا = ۶۰$ ، صف $لا = ۱$ تو

$$صف ما = ۶۰^3 = ۲۱۶۰۰۰$$

ایک خاص درجہ صحت تک۔

۷۔ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر۔

متغیروں $لا$ ، $ما$ کے درمیان جو ربط ہے اب ہم اسکی ہندسی تعبیر علی القوائم محاور $ولا$ ، $وما$ لیکر معلوم کرتے ہیں۔ $ولا$ میں طول $و$ ، $ما$ میں اس طرح کہ وہ متغیر متغیر $لا$ کی کسی خاص قیمت کو تعبیر کرے اور $وما$ میں $و$ لہو جو تفاعل $ما$ کی متناظر قیمت کو تعبیر کرے اور مستطیل $و م ن ل$ کی تکمیل کر دو تو نقطہ $ن$ کا مقام



شکل (۶)

دونوں مربوط متغیروں کی قیمتوں کو ظاہر کریگا۔

اب چونکہ نقطہ $م$ بموجب فرض $ولا$ پر کوئی مقام اختیار کر سکتا ہے جو (مکمل ہے کہ) دو ثابت سروں کے درمیان ہو ہمیں اس طرح نقاط $ن$ کا ایک لامتناہی گروہ حاصل ہوتا ہے۔

اس گروہ کی نوعیت سے متعلق اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے۔ کیا اس

گروہ کے نقاط ایک نفعی پر واقع ہوتے ہیں ۹۔ اکثر صورتوں میں اسکا جواب ظاہر ہے۔ مثلاً ایک دائرہ کے رقبہ اور اس کے نصف قطر کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکی اگر ہندی تعبیر معلوم کرنا ہو تو ہم ω کو نصف قطر کے متناسب اور ∞ کو رقبہ کے متناسب لیتے ہیں۔ اس طرح ∞ و ω اور نقاط ∞ ایک مکانی پر واقع ہوتے ہیں یہی نفعی اس ربط کو بھی تعبیر کرے گا جو ایک گرنے والے جسم کے طے شدہ فاصلہ (ف) اور وقت (ت) کے درمیان ہے کیونکہ ف ایسے بدلنا ہے جیسے ت۔

لیکن عام صورت میں ہمارا جواب نفعی میں ہونا چاہئے۔ دفعہ (۶) کی ابتدا میں تفاعل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کا ضروری مفہوم یہ ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ω کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ω کی قیمتیں ہیں ان میں کسی ربط کا موجود ہو نا ضروری نہیں ہے خواہ لا کی یہ مختلف قیمتیں ایک دوسرے سے کتنے ہی قریب واقع ہوں۔

تفاعل کی جس تعریف کا حوالہ دیا گیا ہے وہ حقیقت ہمارے موجودہ مقایسہ کا لحاظ کرتے ہوئے بہت زیادہ وسیع ہے۔ عام طور پر احصا میں ایسے تفاعلوں سے سابقہ پڑے گا جو چند خاص اہم قیود کی پابندی کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلی قید وہ ہے جو شامل کے نام سے موسوم ہے۔ اس کا مقصد یہ ہے کہ جس طرح نقطہ ہر خط ω کے کسی محدود حصہ (اب) پر چلتا ہے، ω بھی خط ω کے ایک محدود حصہ ω پر چلتا ہے یعنی ω کے کم سے کم ایک مرتبہ ω اور ω کے درمیان ہر مقام کو اختیار کرتا ہے مزید بریں اگر وسعت ω کو مسلسل گھٹا دیا جائے تو وسعت ω بھی گھٹتی ہے اور ω کو کافی چھوٹا لینے سے اس قدر چھوٹی بنائی جاسکتی ہے جسقدر ہم چاہیں۔

ابھی تک یہ دیکھنے کے دفعہ (۸) کہ اس دوسری خاصیت میں ω کی خاصیت شامل ہے۔ اب ہم مسلسل تفاعل کی باضابطہ تعریف دینگے جو اگرچہ

تفاعل ہو تو ایک مقدار صہہ کا معلوم کرنا ممکن ہونا چاہئے اس طرح کہ

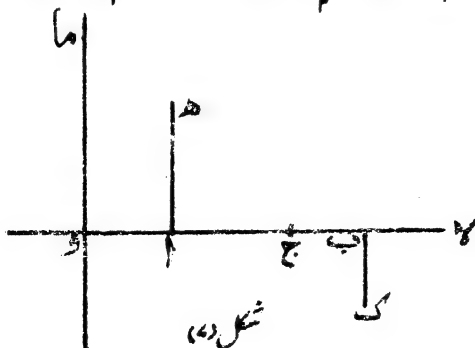
ا ف (لا + ہ) - ف (لا) | > ش

ہ کی تمام جائز قیمتوں کے لئے اس طرح کہ ا ہ | > صہہ کی قیمت عام طور پر ش کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے لیکن اس تعریف میں یہ مفہوم مضمر ہے کہ صہہ کی کسی خاص قیمت سے شرط بالا ہمیشہ پوری ہو سکتی ہے خواہ ش کتنا ہی چھوٹا ہو۔

۹۔ مسلل تفاعل کی خاصیت۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور اگر ف (ا) ' ف (ب) مختلف العلاست ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ف (لا) = ۰۔ شکل ذیل میں صراحت کی خاطر یہ مان لیا گیا ہے کہ ف (ا) مثبت اور ف (ب) منفی ہے۔ خط لا لا کے وہ نقطے جہاں لا = ا، لا = ب علی الترتیب ا، ب سے تعبیر کئے گئے ہیں اور تفاعل کی تناظر قیمتیں ا، ہ، ب کے سے تعبیر ہوتی ہیں۔ ثبوت اس بات پر مشتمل ہے کہ طول میں گھسنے والے دونوں کا سلسلہ

ا ب، $\frac{1}{2}$ ا ب، $\frac{1}{3}$ ا ب،، $\frac{1}{n}$ ا ب،، ا ب،،



علامت تبدیل نہیں کر سکتا جب تک کہ وہ صفر قیمت میں سے نہ گزرے۔
 اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک سلسل ہے
 اور اگر ف (ا) ف (ب) غیر مساوی ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی
 ایک قیمت موجود ہونی چاہئے ایسی کہ ف (لا) = بیہ جہاں بیہ ف (ا)
 اور ف (ب) کے درمیان کوئی مقدار ہو سکتی ہے۔ کیونکہ فرض کرو
 فہ (لا) = ف (لا) - بیہ
 چونکہ بیہ مستقل ہے فہ (لا) بھی ایک سلسل تفاعل ہوگا۔ بموجب فرض
 ف (ا) - بیہ اور ف (ب) - بیہ
 مختلف العلامت ہیں اور اس لئے فہ (ا) اور فہ (ب) مختلف العلامت
 پس مسئلہ بالاسے ا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی
 چاہئے جس کے لئے فہ (لا) = بیہ یعنی ف (لا) = بیہ
 الفاظ دیگر ایک سلسل تفاعل ایک قیمت سے دوسری قیمت تک جان نہیں سکتا
 جب تک کہ ہر درمیانی قیمت کو (کم سے کم) ایک مرتبہ اختیار نہ کرے۔

۱۰۔ سلسل تفاعل کی ترکیب

جو کچھ کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقاط کا گردہ
 جو ایک تفاعل کو دفعہ (۱۲) کے معنوں میں تعبیر کرتا ہے ایک مثلکہ گردہ پیدا کرتا
 ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اس گردہ میں سے کوئی ایسا خط نہیں کھینچا جاسکتا
 جو اس کے کسی نہ کسی ایک نقطہ میں سے نہ گزرے۔ کیونکہ اگر تفاعل کو ف (لا)
 سے اور کسی خط کے معین کو ف (لا) سے تعبیر کریں اور اگر ف (لا) اور ف (ا)
 دونوں سلسل ہوں تو فرق

فہ (لا) - ف (لا)

بھی سلسل ہوگا (دفعہ ۱۲) اور اس لئے یہ علامت بدل نہیں سکتا جب تک کہ صفر
 قیمت میں سے نہ گزرے۔

اب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم نقاط کے ایک مثلکہ گردہ کا ایک نسخہ یہ

واقع ہونا فرض کر سکتے ہیں۔ اسکا جواب زیادہ تر اس پر منحصر ہے کہ اصطلاح ”مختی“ کے ساتھ کیا خاصیتیں لازم قرار دی جاتی ہیں۔ بہر کیف یہ تو ظاہر ہے کہ گروہ سے متعلق کافی نقاط معلوم کر کے ان کو علی طور پر ایک کاغذ پر ترسیم کر کے اور ان میں سے گذرنا ہوا ایک مسلسل خط کھینچنے سے ہم ایک مسلسل تفاعل کے عام طریق یا چال کو اچھی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔ جو شکل اس طرح بنائی جاتی ہے اس کو تفاعل کی ”ترسیم“ کہتے ہیں۔

ذیل کے تفاعلوں کی ترسیمات سے طالب علم بخوبی واقف ہوگا یہ سادہ اور دودرجی مساواتوں کے نظریہ کی توضیح کے لئے استعمال ہوتی ہیں۔

$$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب} \quad \text{ما} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$$

اس کتاب میں ترسیمی طریقہ توضیح کی خاطر اکثر استعمال کیا جائیگا (جیسا دوسری ابتدائی کتابوں میں استعمال کیا جاتا ہے) لیکن یہ بنیادین ضروری ہے کہ تفاعل ریاضی پر اس کو استعمال کرنے میں خاص خاص قیود کا خیال رکھنا پڑتا ہے۔ سب سے پہلے یہ ظاہر ہے کہ جدا جدا قیمتوں کی ایک محدود تعداد تفاعل کو پوری طرح تعبیر نہیں کر سکتی۔ اور درحقیقت جب تک کہ لا کی قیمتوں کے انتخاب میں جن کے لئے تفاعل محسوب کیا جا رہا ہے احتیاط سے کام نہ لیا جائیگا نتیجہ سے بہت زیادہ غلط فہمی پیدا ہو سکتی ہے۔ مزید بریں سیاہی یا پنسل کی لکیر کا جس سے ہم تفاعل کا طریق تعبیر کرتے ہیں (بہ خلاف خیالی ریاضی خط کے) کچھ نہ کچھ عرض ضرور ہوگا اور یہی حال اس لکیر کا ہے جو محور لا کو تعبیر کرتی ہے۔ اس طرح ان دونوں کے درمیان جو ناصصلہ ہے اسکو صحیح طور پر معلوم کرنے میں ابہام کا امکان ہے۔ نیز اسی سبب سے ایک حد سے زیادہ تفصیلات کا بیان کرنا ناممکن ہے۔ اس لئے یہ طریقہ ایسے تفاعلوں کی صورت میں (جسکا وجود ثابت کیا جاسکتا ہے) بذاتہ ناقص سمجھا جاتا ہے جن میں پیمانہ کو بڑا کرنے سے نئی نئی تبدیلیات کا انکشاف رونما ہوتا ہے۔ سو الخ ذکر

✽ مثلاً تفاعل $\text{ا} + \text{ب}$ کی تفصیلات مبداء کے پاس۔

قبیل کے تفاعیل احصا میں بہت کم استعمال ہوتے ہیں۔
 ۱۹ ترتیبی تعبیر کا طریقہ اکثر اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ تفاعل کے لئے ریاضی
 شکل کا کوئی جملہ معلوم نہ ہو سکے اور شاہدہ سے متغیر متبوع اور تابع متغیر کی چند متناظر
 قیمتیں معلوم کی جائیں۔ اس صورت میں خطوط کی موٹائی کی وجہ سے جس ابہام کا
 امکان ہے وہ بمقابلہ اس کے قابل قدر نہیں ہے جو اس کے نقائص اور
 شاہدے کی اغلاط سے پیدا ہوتی ہیں۔

طالب علم نے ایسے سوئی جدولوں کا مشاہدہ کیا ہو گا جن میں باہر کا یا
 پیش یا کے ارتفعل کو وقت کے ایک تفاعل کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے
 طریقہ بالا کو مد نظر رکھ کر ترتیم حاصل کی جاتی ہے اس سے درحقیقت انہی
 باتوں کا انکشاف ہوتا ہے جو اس عددی جدول سے اخذ ہو سکتی ہیں جس میں متغیر
 کی متناظر قیمتوں کے جوڑوں کا ایک سلسلہ مندرج ہوتا ہے لیکن ترتیبی شکل زیادہ
 قوی طریقہ سے دل پراثر کرتی ہے اور تفاعل کی درمیانی قیمتوں کا تصور پیدا کرنے
 میں مدد دیتی ہے۔

۱۱۔ عدم تسلسل۔

اگرچہ ریاضیات میں جن تفاعلوں سے سابقہ پڑتا ہے وہ عام طور پر زریعت
 متغیر متبوع کی وسعت میں بعض اور سلسلے ہوتے ہیں لیکن بعض صورتوں میں
 چند متناظر قیمتوں پر یہ تسلسل قائم ہوتا ہے۔
 مثلاً یہ ہو سکتا ہے کہ متغیر متبوع کی چند خاص قیمتوں کے لئے تفاعل کی
 ابتدائی تعریف بے معنی ثابت ہو۔ مثال کے طور پر تفاعل

جب لا

پر غور کرو۔ صفر کے علاوہ لا کی کسی قیمت کے لئے شمار کنندے اور نسب نامہ کی
 خاص قیمتیں ہوتی ہیں اور خارج قسمت کا وجود ہوتا ہے۔ لیکن جب لا = ۰
 تو کسر غیر معین شکل اختیار کرتی ہے۔ یہ صحیح ہے کہ عام طور پر اس قیمت

انفرض کر لی جاتی ہے لیکن ابتدائی تعریف کا یہ مفہوم نہیں ہے۔ اسی طرح کی بہت سی اور مثالیں پیش آئیں گی۔
 مزید براں تفاعل $(لا)$ کی کسی خاص قیمت $(لا)$ کے لئے لامتناہی ہو سکتا ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ $(لا)$ کو کافی طور پر $(لا)$ کے تقریباً مساوی لینے سے تفاعل کی قیمت کسی مقدار سے جو ہم منتخب کریں متجاوز ہو سکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی بڑی ہو۔ اسکو عام طور پر ہم ضابطہ

$$\infty = (لا) ف$$

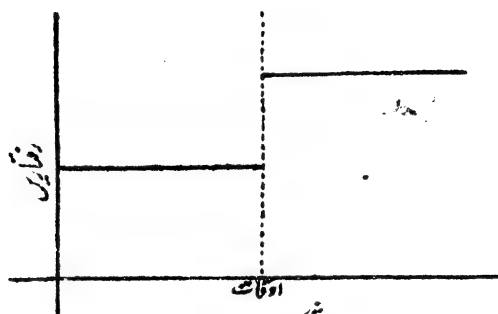
سے تعبیر کریں گے۔ ریاضیات میں لفظ 'لامتناہی' کے صرف وہی معنی ہیں جو اوپر بیان ہوئے اور رمز ∞ کا جائز استعمال صرف اس قسم کے محفل ضابطوں کے ذریعہ ہو سکتا ہے جو اوپر بیان ہوئے۔

تفاعل $\frac{1}{لا}$ سے جو $لا$ کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے اور تفاعل مس $لا$ سے جو $لا$ کے لئے لامتناہی ہوتا ہے متذکرہ بالا بیان کی مثالیں حاصل ہوتی ہیں۔ دیکھو شکل ۱۵ صفحہ ۲۲۔
 نیز علم خیل میں رفاص کے اتہزاز کا دور جو سرعت $(ع)$ کا تفاعل ہوتا ہے $ع$ کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے۔

مزید براں ایک تفاعل کو محدود ہو لیکن $(لا)$ کی کسی خاص قیمت $(لا)$ کے لئے غیر مسلسل ہو سکتا ہے یعنی $لا = لا$ ۔ صہ اور $لا = لا$ صہ کے لئے اس کی قیمتیں غیر مساوی ہو سکتی ہیں خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ ایسی صورت میں تفاعل کی ابتدائی تعریف سے $لا = لا$ کے لئے تفاعل کی ایک معین قیمت حاصل ہو سکتی ہے یا حاصل نہیں ہو سکتی۔

اس کی مثال علم خیل سے مل سکتی ہے۔ ایک ذرہ حرکت کر رہا ہے اور حرکت کی سمت میں اس کو ایک دے ہوئے لمحہ پر اچانک دھک دیا جاتا ہے۔ اس صورت میں ٹھیک اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار غیر معین ہوتی ہے اگرچہ دھک کے عین

پیشتر اور عین بعد کی رفتاروں کی تعیین ہو سکتی ہے۔



شکل (۸)

عدم تسلسل کی اور مثالیں ہو سکتی ہیں لیکن اس مضمون کے عام استعمال میں نہیں پائی جاتیں۔

۱۲۔ سلسل تفاعلوں سے متعلق مسائل۔

اب ہم مختلف تفاعلوں کے تسلسل یا عدم تسلسل کی تحقیق کریں گے اور انہی تریبی تعیین کی نوعیت معلوم کریں گے جبکہ ان تفاعلوں کی صریح طور پر یا ضعیف تعیین ہو سکے۔

اس مقصد کے لئے حسب ذیل ابتدائی مسائل کا جان لینا ضروری ہے۔
۱۔ سلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا مجموعہ خود ایک سلسل تفاعل ہوتا ہے یا نہیں؟
پہلے فرض کرو کہ متغیر متبوع لا کے دو تفاعل ۶ اور ۷ ہیں۔ تب

$$\text{مف} (۶ + ۷) = (۶ + \text{مف} ۷) + ۷ + \text{مف} ۶ - (۶ + ۷)$$

$$\Delta = \text{مف} ۶ + \text{مف} ۷$$

تسلسل کی تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ شما کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ

$$\text{امف} (۶ + ۷) > \text{امف} ۶ + \text{امف} ۷ > \frac{1}{2} \text{ شما} \text{ امف} ۶ + \frac{1}{2} \text{ شما} \text{ امف} ۷$$

امف ع + مف و | > ث

پس تفاعل ع + و سلسل ہے۔
اب اگر تین سلسل تفاعل ع، و، ہوں تو ع + و سلسل ہے جس طرح
کہ ثبوت بالا سے ظاہر ہے اور اس لئے (ع + و) + ہ سلسل ہے۔ اسی طرح
اس مسئلہ کو قدم بہ قدم تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی صورت میں وسعت
دیجا سکتی ہے۔
۲۔ سلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا حاصل ضرب خود ایک سلسل
تفاعل ہوتا ہے۔

پہلے دو تفاعلوں ع، و کی صورت پر غور کرو۔

مف (ع و) = (ع + مف ع) (و + مف و)۔ ع و

= و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

ہو جب فرض ہم امف لا کو کافی چھوٹا لیکر امف ع اور امف و کو کسی
مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ پس چونکہ ع اور و
محدود ہیں اور مف ع اور ع مف و کسی مقررہ مقدار سے چھوٹے
بنائے جاسکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو یہی حال امف ع مف و
کا ہے۔ اس لئے

اور مف ع + ع مف و + مف ع مف و |

کی قیمت بھی کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنائی جاسکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی
چھوٹی ہو۔ یعنی ع و ایک سلسل تفاعل ہے۔

اب فرض کرو کہ تین سلسل تفاعل ع، و، ہ ہیں ہم نے دیکھ لیا کہ ع و
سلسل ہے اس لئے (ع و) بھی سلسل ہے۔ اور اسی طرح سلسل

تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی صورت میں بھی یہ درست ہے۔

۳۔ دو سلسل تفاعلوں کا خارج قسمت سلسل تفاعل ہوتا ہے سوائے متغیر
متبعی کی ان قیمتوں کے لئے (اگر کوئی ہوں) جن کے لئے مقسوم علیہ صفر ہوتا ہو۔
فرض کرو کہ تفاعل ع و اور و ہیں تو

$$\text{مف} \left(\frac{ع}{و} \right) = \frac{ع + \text{مف} ع - ع}{و + \text{مف} و - و}$$

$$= \frac{\text{مف} ع - ع}{و + \text{مف} و}$$

بوجب فرض و۔ اس لئے مقدار و (و + مف و) کی مطلق قیمت کی ایک منجلی انتہا نہ ہونی چاہئے جو صفر نہیں ہو سکتی۔ پس

$$|\text{مف} \left(\frac{ع}{و} \right)| > \left| \frac{\text{مف} ع - ع}{و + \text{مف} و} \right|$$

اب چونکہ $\frac{و}{ع}$ اور $\frac{ع}{و}$ محدود ہیں ہم مف و کو کافی چھوٹا لینے سے $\left| \frac{\text{مف} ع - ع}{و + \text{مف} و} \right|$ اور $\left| \frac{ع}{و} \right|$ مف و کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے

ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اس لئے $|\text{مف} \left(\frac{ع}{و} \right)|$ پر بھی یہ درست ہوگا۔ یعنی خارج قسمت $\frac{ع}{و}$ سلسل ہے۔

۴۔ اگر ما' کا ایک سلسل تفاعل ہو جہاں ع' لا کا ایک سلسل تفاعل ہو تو ما' لا کا ایک سلسل تفاعل ہوگا۔

کیونکہ فرض کر دے لا کا کوئی اضافہ مف لا ع کا متناظر اضافہ مف ع اور ما' کا متناظر اضافہ مف ما' ہے۔ چونکہ ما' ع کا ایک سلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

$$|\text{مف} ع| > \text{صہ تو } |\text{مف} ما'| > \text{صہ}$$

جہاں صہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اور چونکہ ع' لا کا ایک سلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

$$|\text{مف} لا| > \text{صہ تو } |\text{مف} ع| > \text{صہ}$$

شکل

$$\text{لا} (\text{لا} + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} + \dots + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا}})$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کو کافی بڑا (مطلق قیمت میں) لینے سے ہم پہلے جزو ضربی (لا) کو جس قدر بڑا بنا چاہیں بنا سکتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ دوسرے جزو ضربی کی قیمت لا کے اس قدر قریب لائی جاسکتی ہے جس قدر ہم چاہیں۔ یعنی انکا حاصل ضرب اس قدر بڑا بنا جاسکتا ہے جس قدر ہم چاہیں۔ مزید یہ کہ اگر لا مثبت ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو لا کی ہے لیکن جب لا منفی ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو لا کی ہے یا اس کے برعکس ہو جب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہو۔ صحیح تفاعل

امور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منطبق صحیح تفاعل
 ما = ف (لا) کی ترسیبی تعبیر میں منحنی ہر جگہ محور لا سے محدود فاصلے پر واقع ہوتا ہے لیکن اس سے ہٹنا جانا ہے بغیر کسی حد کے جس طرح لا مسلسل طور پر بغیر حد کے بڑھتا ہے خواہ یہ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں۔ منحنی کو عملی طور پر بنانے میں مساوات ف (لا) = کو حل کر لینا مفید ہوتا ہے (اگر اس کا حل معلوم کرنا ممکن ہو) کیونکہ اس سے یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ منفی محور لا کو کتنے نقاط پر قطع کرتا ہے۔

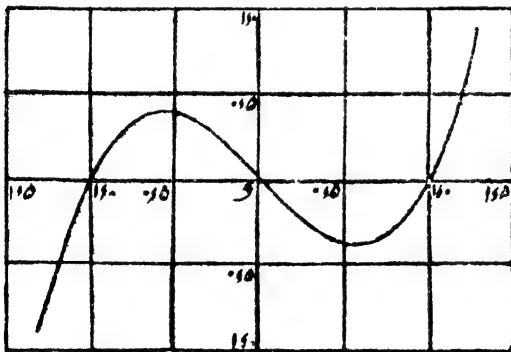
مثال - منحنی ما = لا (لا - ۱) کی ترسیم یہ منحنی محور لا کو نقاط

لا = ۰، ۱ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ جب لا = ۰، لا متبادل لا کے لا اتنا چھوٹا ہوتا ہے اس لئے منفی ابتدا کے قریب خط مستقیم ما = لا کی شکل تقریباً اختیار کرتا ہے جو دراصل مبدأ پر منحنی کا ماں ہے۔ چونکہ ما، لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے ہم صرف لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معینوں کو محسوب کرتے ہیں۔ ہم بہ آسانی

حسب ذیل جدول مرتب کر سکتے ہیں جہاں صرف دو ملحوظ ہندسوں کو عمل میں قائم رکھا گیا ہے۔

لا	لا	لا	لا
۵۱	۵۸	۵۱۰	۵۲۹
۵۲	۵۹	۵۱۹	۵۱۶
۵۳	۱۵۰	۵۲۶	۰
۵۴	۱۵۱	۵۳۲	۵۲۳+
۵۵	۱۵۲	۵۳۸	۵۵۱+
۵۶	۱۵۳	۵۳۸	۵۸۸+
۵۷	∞	۵۳۶	∞

شکل ذیل اس منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔



شکل (۹)

۱۴۔ منطق کسیریں۔

تفاعل ما = $\frac{\text{فا (لا)}}{\text{ف (لا)}}$ ----- (1)

جو منطق ہے لیکن صحیح تفاعل نہیں ہے، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے سوائے ان قیمتوں کے جن کے لئے ف (۱) = *، محدود اور مسلسل ہے۔ کیونکہ یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ منطق صحیح تفاعل فا (۱) اور ف (۱) محدود اور مسلسل ہوتے ہیں جس سے بموجب دفعہ (۲) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خارج قسمت بھی محدود اور مسلسل ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ نسب نامہ صفر ہو جائے۔

(۱) سے تعبیر ہونے والا منحنی محور (لا) کو ان نقاط پر قطع کریگا (اگر کوئی ہوں) جبکہ لئے فا (لا) = 'ا کے متوازی منحنی کے مستقارب ہوں گے جہاں کہیں

ف (لا) = اور (لا) کی باقی تمام محدود قیمتوں کے لئے ماحدود اور مسلسل ہوگا۔
 لا $\leftarrow \infty$ کے جواب میں ماحکی قیمتیں فا (لا) اور ف (لا) کے اضافی درجوں

پرمختصر ہوتی ہیں۔ اگر فا (لا) ف (لا) سے بڑے درجہ کا ہو تو معین لائتہابی ہو جاتے ہیں لیکن اگر کم درجہ کا ہو تو معین لائتہابی چھوٹے ہوتے ہیں۔ اس صورت میں محور لا متقارب ہوتا ہے۔ اگر دونوں کا درجہ وہی ہو تو محور لا کے متوازی ایک متقارب ہوتا ہے۔

ایسی صورتوں میں جہاں شمار کنندہ کا درجہ نسب نامے کے درجہ سے کم نہ ہو وہ بہتر ہو گا کہ شمار کنندہ کو نسب نامے اتنا تقسیم کیا جائے کہ باقی مفسوم علیہ کے درجہ سے کم درجہ کا ہو اور پھر ما کو ایک صحیح تفاعل اور ایک صحیح کسر کے مجموعہ سے خارج کیا جائے۔

چند ضروری امور کی وضاحت حسب ذیل مثالوں سے ہوگی۔

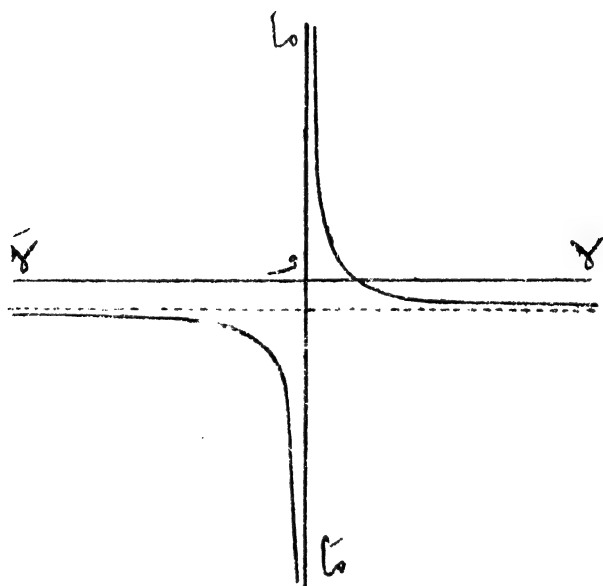
مثال ۱- $\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{r} = \frac{1-1}{\sqrt{r}} = 0$

ما مثبت ہے اور اس وقفہ کے باہر بھی۔ ما کی دوسری صورت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر $\frac{1}{p} \rightarrow \infty$ تو $\frac{1}{p} = \frac{1}{\infty}$ فرید بیریں لا اور ما کی حسب ذیل متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\infty + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{ما} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{ما} = \frac{1}{\infty} = 0$$

شکل ذیل منہی کو ظاہر کرتی ہے۔



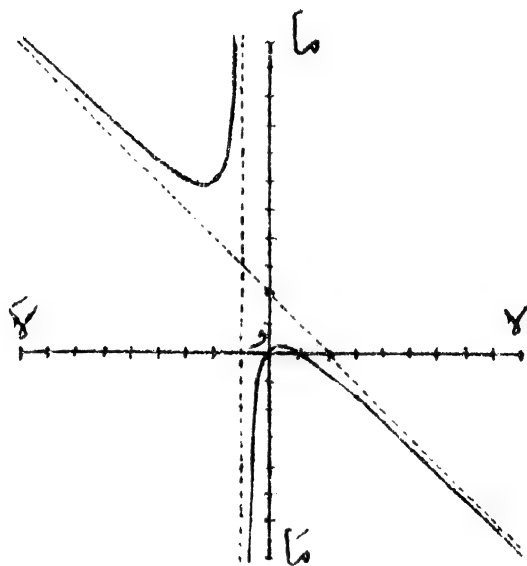
شکل (۱۰)

$$\frac{2}{\frac{1}{p} + 1} - 2 + \frac{1}{p} = \frac{(1-p)}{\frac{1}{p} + 1} = \text{ما} \quad \text{مثال ۲-}$$

یہاں $\text{لا} = 0$ ، تو $\text{ما} = 0$ اور $\text{لا} = 1$ تو بھی $\text{ما} = 0$ اور $\text{لا} < 0$ تو $\text{ما} < 0$ اور $\text{لا} > 0$ تو $\text{ما} > 0$ ۔
 نیز ما علامت بدلتا ہے جبکہ لا انیس سے ہر ایک قیمت میں سے گزرتا ہے۔ لا کی
 بڑی قیمتوں کے لئے خواہ منفی ہوں یا مثبت منفی کی تقریری شکل

$$\text{ما} = -(\text{لا} + 2)$$

ہو جاتی ہے جو ایک خط مستقیم ہے۔ $\text{لا} < 0$ کے لئے یہ منفی اس خط کے نیچے
 واقع ہوتا ہے اور $\text{لا} > 0$ کے لئے اس خط کے اوپر۔ شکل (۱۱) میں اس منفی کو
 دکھایا گیا ہے۔



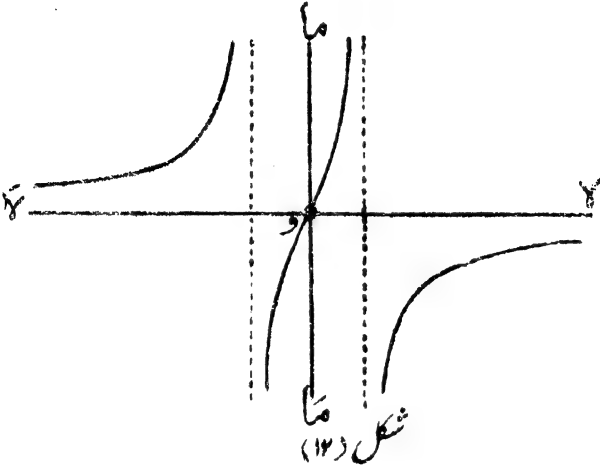
شکل (۱۱)

$$\text{ما} = \frac{2}{\text{لا} - 1}$$

شکل ۳-

یہاں $\text{لا} = 0$ اور $\text{لا} < 0$ کے لئے ما محدود رہتا ہے اور $\text{لا} > 0$ کے لئے
 لامتناہی۔ نیز $\text{لا} < 0$ کے لئے ما مثبت ہوتا ہے اور $\text{لا} > 0$ کے لئے

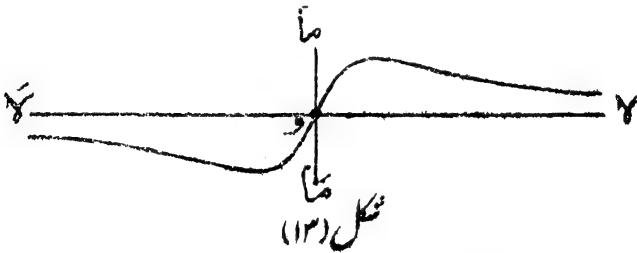
منفی۔ مزید بریں لا کے ساتھ ما علامت بدلتا ہے۔



شمال ۴۔ $\frac{لا^2}{لا + ۱} = ما$

۲۷

پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی لا $\rightarrow 0$ اور لا $\rightarrow \pm \infty$ کے لئے ما معدوم ہوتا ہے اور لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔ لیکن نسبت نا لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے معدوم نہیں ہوتا اس طرح ما ہمیشہ محدود ہوتا ہے۔



۱۵۔ دائری تفاعل۔ جب لا 'اجم لا' 'مس لا' وغیرہ

کی عام تعریفات علم ثلث کی کسی کتاب سے معلوم ہونگی۔
تفاعل جب لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ کیونکہ
مف (جب لا) = جب (لا + مف لا)۔ جب لا

$$= ۲ جب \frac{1}{۲} مف لا جم (لا + \frac{1}{۲} مف لا)$$

آخری جزو ضربی ہمیشہ محدود ہوتا ہے اور مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے
حاصل ضرب اس قدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے بقدر ہم چاہیں۔
اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم لا مسلسل ہے۔ نتیجہ بہر کیف
قبل الذکر میں مشتمل ہے۔ کیونکہ
جم لا = جب (لا + $\frac{1}{۲}$ π)

پھر چونکہ

$$\frac{مس لا}{جم لا} = جب لا$$

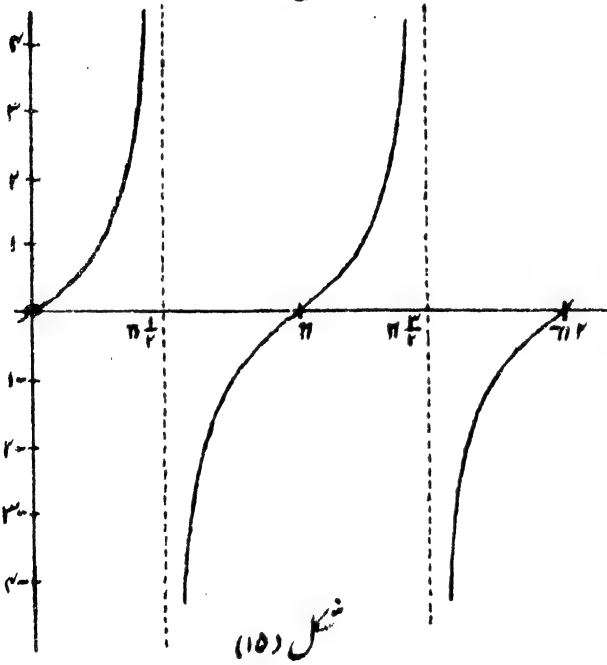
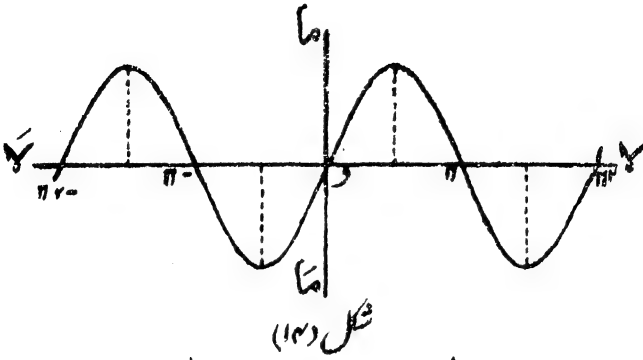
اور جب لا اور جم لا کا مسلسل ہونا ثابت ہو چکا ہے اس لئے مس لا
بھی مسلسل ہے سوائے لا کی ان قیمتوں کے جن کے لئے جم لا = قیمتیں
لا = (ن + $\frac{1}{۲}$) π سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔
اسی طرح قط لا، قم لا، ہم لا کی صورتوں پر بحث ہو سکتی ہے۔

صفحہ آئینہ ویر جب لا اور مس لا کی تریسات بتلائی گئی ہیں۔ طالب علم
کو یہ دیکھنا چاہئے کہ کس آسانی سے روابط

$$جب (- لا) = - جب لا جب (- لا) = جب لا$$

$$جب (لا + \pi) = جب لا مس (لا + \pi) = مس لا$$

منفیوں کے تشاکل کو پیش نظر رکھ کر حاصل ہو جاتے ہیں۔

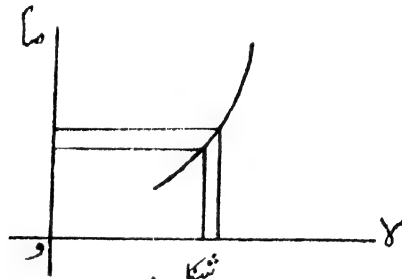


۱۶- منقلب تفاعل -

۹۲

اگر ما لا کا ایک مسلسل تفاعل ہو تو بعض شرائط کے تحت لا کا ایسا
مسلسل تفاعل ہوگا۔ یہ بات اس وقت ہوگی جبکہ لا کی وسعت ایسے حصوں
میں (جو لامتناہی چھوٹے نہ ہوں) تقسیم ہو سکتی ہو کہ ہر ایک حصہ میں تفاعل ما

استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہو جیسے لا بڑھے۔
فرض کرو کہ جس طرح لا اور سے ب تک بڑھتا ہے ماکہ سے بیا
ایک استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے تب ص اور بیا کے درمیان ماکہ کسی قیمت کے
متناظر اور ب کے درمیان لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی۔ پس
اگر ہم اس وقفہ کے اندر ہی لا کی قیمتوں سے سروکار نہیں تو لا



شکل (۱۶)

ما کا وحید قیمت تفاعل ہوگا۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ لا، ماکہ ایک سلسل تفاعل ہے۔
کیونکہ اگر ہم وقفہ مندرجہ بالا کے اندر لا میں کسی مثبت مقدار ص کے اضافہ کریں
تو ما میں بھی ایک محدود مقدار ث کے اضافہ ہوگا۔ اور ث کے کم ماف ماکہ کی تمام
قیمتوں کے لئے ماف لا > ص ہے۔ یہی استدلال اس وقت بھی درست ہے جبکہ لا کا
اضافہ منفی ہو۔ پس ہم ایک مثبت مقدار ث کے معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ جب ص
کوئی مقررہ مثبت مقدار ہو خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو تو ماف لا > ص ہے، ماف ماکہ
کی ان تمام قیمتوں کے لئے جن کے لئے ماف ماکہ > ص ہے۔ لیکن یہ لا کے سلسل
ہونے کی شرط ہے جبکہ لا، ماکہ ایک تفاعل ہو۔ (وقفہ ۸)
صیر کا ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جب ماکہ لا = لا = سے لا = ب تک کے
وقفہ میں استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

اگر ہم اس وقفہ کے پابند نہ رہیں جس میں تفاعل استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہے
تو ماکہ کسی دی ہوئی قیمت کے متناظر لا کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں۔ ایسی
صورت میں مقلوب تفاعل کو ہم کثیر قیمت کہیں گے۔ نیز یہ بھی ہو سکتا ہے (اور عام طور پر

ہوگا کہ ماکہ خاص دستوں میں ماکہ قیموں کے متناظر لا کی کوئی قیمتیں حاصل نہ ہوں
یعنی مقلوب تفاعل کا وجود نہ ہو۔

اگر ماکہ = ف (لا) (۱)
تو مقلوب تفاعلی ربط کو بعض اوقات ہم اس طرح بیان کریں گے:-

لا = ف' (ما) (۲)

پس ف { ف' (ما)، ف (لا)، ماکہ = (۳)

یعنی تفاعلی رموز ف اور ف' ایک دوسرے کو خارج کر دیتے ہیں۔ ترتیم (۲) کی
یہی وجہ ہے۔

مقلوب تفاعل کی ترتیم اصلی تفاعل کی ترتیم سے صرف لا اور ماکہ محوروں کا
تبادلہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ ماکہ = لا، یہ لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے اور اگر لا مثبت ہو تو لا کے
ساتھ مسلسل بڑھتا ہے۔ پس لا = ماکہ، ماکہ کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر لا علامت
کی پابندی نہ کرے تو ماکہ قیمت کے متناظر لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان کو عام طور پر
ماکہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر ماکہ منفی ہو تو مقلوب تفاعل ماکہ کا وجود نہیں ہوتا۔

مثال ۲۔ مقلوب دائری تفاعل

جب لا، جہم لا، مس لا، وغیرہ

کی قیمتیں تفاعل ہیں۔

تفاعل جب لا، جہم لا، کا وجود لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے ہے جو

۱۔ سے ۱ کے درمیان واقع ہوں لیکن ان حدود کے باہر جو قیمتیں ہوں ان کے لئے

ان تفاعلوں کا وجود نہیں۔

تفاعل مس لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے وجود رکھتا ہے یہ کثیر قیمت تفاعل ہے۔

لا کی قیمتیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں جنکا فرق مشترک π ہے۔

جب لا اور مس لا کی ترتیمات اشکال ۱۱، ۱۲ میں بتلائی گئی ہیں۔

۱۔ گروہ کی علوی یا سفلی انتہا۔

قبل اس کے کہ ہم مسلسل تقاضوں کے نظریہ پر مزید بحث کریں 'علوی' اور 'سفلی' انتہا اور انتہائی کیفیت کی تعریفات کی جگہ تذکرہ و فہات (۲) اور (۴) میں ہو چکا ہے تو سب سے زیادہ مناسب سمجھتے ہیں۔

سب سے پہلے مقداروں کے ایسے گروہ پر غور کرو جو تعداد میں لا انتہا ہیں لیکن تمام کسی محدود مقدار بعد سے کم ہیں۔ گروہ کی تعریف کسی طور پر ہو سکتی ہے لیکن ضرورت اس میں زیادہ تر صرف ایسی کمائی کی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ کوئی وی ہوئی مقدار اس گروہ سے متعلق ہے یا نہیں۔ مثلاً ایک گروہ ان قیمتوں پر مشتمل ہو سکتا ہے جو ایک دیا ہوا قاعل (مستل ہو یا نہ ہو) اختیار کرتا ہے جبکہ غیر متبوع کسی محدود یا غیر محدود دست میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

اس قسم کے گروہ میں ممکن ہے کہ "بڑی سے بڑی" مقدار موجود ہو یا نہ ہو یعنی ایسی مقدار جس سے باقی مقداریں تجاوز نہیں کر سکتیں۔ لیکن ہر صورت میں گروہ کی مقداروں کی ایک 'علوی' انتہا ضرور ہوگی یعنی ایک خاص مقدار ایسی موجود ہوگی کہ گروہ کی کوئی مقدار اس سے تجاوز نہ کرے گی اور (کم سے کم) ایک مقدار معلوم ہو سکے گی جو گروہ کی کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہو جو ہمارے کم ہو۔ اگر ہمارے گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی ایک لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہوں جو ہمارے کم ہے۔

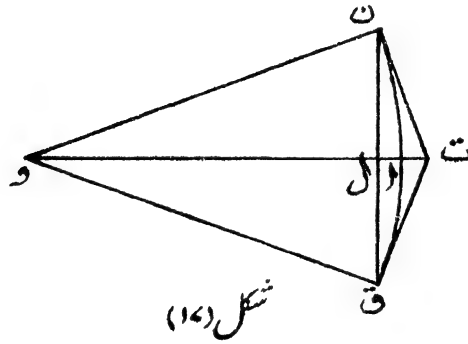
۳۱۔ ان بیانات کا ثبوت دفعہ (۲) کی طرح ہندسی تعبیر کی مدد سے مستطیل ہو سکتا ہے۔

اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لا انتہا ہی گروہ ہو جن میں سے ہر ایک ایک محدود مقدار ہمارے بڑی ہے تو گروہ میں ممکن ہے کہ کم سے کم مقدار ہو یا نہ ہو لیکن ہر صورت میں ایک 'سفلی' انتہا نہ ہوگی اس طور پر کہ گروہ کی کوئی مقدار ہمارے کم نہیں ہوگی حالانکہ اگر کوئی مقدار بھی ہو جائے جو نہ سے بڑی ہو تو (کم از کم) ایک مقدار گروہ کی سلام ہو سکتی جو اس سے بڑی ہو اور اگر نہ ہو تو گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو ان مقداروں کی لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک مقدار سے کم ہوں

جو نما سے بڑی ہے۔

ایک عمدہ مثال دائرہ کے محیط یا گھیرے کی تعریف میں پیش آتی ہے۔
دائرہ کے محیط پر نقطوں کی کوئی تعداد لیکر ان کو ترتیب وار ملا یا جائے تو ایک اندرونی کثیر الاضلاع حاصل ہوتا ہے۔ اور اگر ان نقاط پر ماس کھینچے جائیں تو بیرونی باعاط کثیر الاضلاع ملتا ہے۔ اب یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی اندرونی کثیر الاضلاع کا گھیرا بیرونی کثیر الاضلاع کے گھیرے سے کم ہے۔ اگر تمام ممکن اندرونی کثیر الاضلاع کے کل گروہ پر غور کیا جائے تو گھیروں کی ایک خاص علوی انتہا ہوگی۔ اسی طرح تمام ممکن بیرونی کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی ایک سفلی انتہا ہوگی۔

معینہ ان دونوں انتہاؤں کو ایک ہی ہونا چاہیئے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ت ق اندرونی کثیر الاضلاع کے گروہ میں سے ایک کا ایک ضلع ہے۔ ت اور ق ت نقاط اور ق پر ماس ہیں۔



شکل (۱۷)

فرض کرو کہ و مرکز ہے اور ن ق، و ت کو مل پر ملتا ہے۔ تب ن ت اور ق ت بیرونی کثیر الاضلاع کے ضلعوں کے حصے ہوں گے اور اگرچی حاصل جمع کی علامت ہو تو دونوں کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کی نسبت ہوگی

$$\frac{\text{ح (ن ق)}}{\text{ح (ن ق + ق ت)}} = \frac{\text{ح (ن ل)}}{\text{ح (ن ت)}}$$

پس ایک معلوم مسئلہ کی رو سے اوپر کی نسبت قیمت میں اس نمونہ

$$\frac{\text{ن ل}}{\text{ن ت}} = \frac{\text{ول}}{\text{ون}}$$

کی نسبتوں کی اعظم اور اقل قیمتوں کے درمیان ہوگی جو مکمل شکل میں واقع ہوتی ہیں۔ لیکن جب زاوے ن و ق کافی چھوٹے لئے جائیں تو کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد میں متناظر اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے نسبت ول / ون ایک کے اتنا قریب لائی جاسکتی ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لئے متذکرہ بالا علوی اور سفلی انتہائیں وہی ہونی چاہئیں۔

اس معین انتہا کو جس کی طرف ایک اندرونی کثیر الاضلاع (یا بیرونی کثیر الاضلاع) کا گھیرا مال ہوتا ہے جبکہ وہ زاوے جو مرکز پر اضلاع کے محاذی بنتے ہیں لا انتہا گھٹائے جائیں دائرہ کے محیط یا ”گھیرے“ کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔ اس امر کا ثبوت کہ اس انتہا کی نسبت دائرہ کے قطر کے ساتھ سکو (π) سے تعبیر کرتے ہیں تمام دائروں کے لئے وہی ہے علم مثلث کی اکثر ثبوتوں میں ملے گا۔ دائرہ کی کسی قسم کے طول کے متعلق بھی جو کچھ تعبیر سے کم ہو اسی طرح کی تعریف دیا جاسکتی ہے۔ اور یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ یہ یکا نہ قیمت رکھتا ہے۔

۱۸۔ مسلسل تفاعل کی ایک بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے۔

مسلسل تفاعل کی ایک اہم خاصیت یہ ہے کہ متغیر متغیر کی کسی محدود وسعت میں تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے۔ زیادہ صحت کے ساتھ اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر ما ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے (بشمول طرفین) اور اس وسعت میں ما جو قیمتیں اختیار کرتا ہے انکی علوی انتہا صا ہو تو اس وسعت میں

لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ما = صمد۔ یہی حال غلی انتہا کا ہے۔
ایسے تفاعل کی صورت میں جو زیر بحث وسعت میں استعمال کے ساتھ بڑھتا یا استعمال
کے ساتھ گھٹتا ہے یہ مسئلہ خود واضح ہے۔ اس صورت میں ٹی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں
صریحاً وسعت کے سروں پر واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے یہ مسئلہ تو سیدھا اس وقت بھی
درست ہے جبکہ تفاعل اس طرح کا ہو کہ وسعت وقفوں کی ایک جھل و در تعداد
میں تقسیم ہو سکے جن میں سے ہر ایک وقفہ میں تفاعل یا توسیعی بڑھتا ہے یا کم
گھٹتا ہے۔

اس مضمون کے استعمالات میں درحقیقت جن تفاعلوں سے ہمیں سابقہ
پہرے ان میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے، لیکن وہ اصول جن کی مدد سے کسی
دی ہوئی صورت میں ہم اس کی تحقیق کرتے ہیں ایسے استدلال سے قائم کئے جاتے
ہیں جس میں وقفہ ہذا کے مسئلہ کی صداقت مان لی جاتی ہے۔ دیکھو دفعہ (۳۸)۔
اس لئے منطق کے نقطہ نظر سے ایسے ثبوت کا فراہم کرنا بستر ہوگا جس میں زیر بحث
تفاعل سے متعلق کسی چیز کو نہ مان لیا گیا ہو سوائے اس کے کہ وہ بموجب تعریف
دفعہ (۸) مسلسل ہے۔

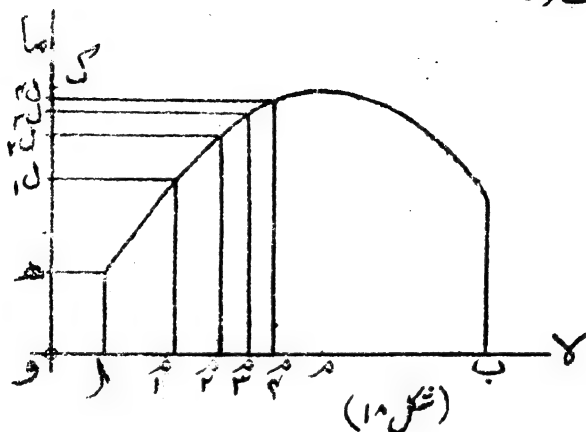
مب ذیل اس طرح کے ثبوت کا خاکہ ہے۔ ہندی تفسیر میں فرض کر دو کہ ۱ = ۱ و ۱ = ۱
و ۱ = ۱۔ ب۔ اگر ۱ = ۱ مائے قیمت غلی انتہا صمد کے مساوی نہیں ہے تو صمد
سے کم ہوگی۔ اس کو ما سے تعبیر کرو۔
لا متناہی طریقوں سے ہم تقادیر

ما، ما، ما

کا ایک سعودی تو از معلوم کر سکتے ہیں جس کی غلی انتہا صمد ہو۔ مثلاً ہم ما کو ما اور
صمد کے اوسط حسابی کے مساوی لے سکتے ہیں، ما کو ما، اور صمد کے اوسط
حسابی کے مساوی اور غلی ہذا القیاس۔ چونکہ وسعت ۱ = ۱ میں ما کی قیمت
ما سے بد لکر کوئی مقدار ہو سکتی ہے جو صمد سے کم ہو، لا کی کم سے کم ایک
قیمت ضرور ہوگی (دفعہ ۹) جس کے لئے ما درمیانی قیمت ما، اختیار کرنا ہے فرض کر دو

تفاعل کی بڑی بڑی اور چھوٹی سی جھوٹی قیمت

لا، اس قیمت کو تعمیر کرتا ہے یا (اگر ایک سے زیادہ ہوں تو) اس طرح کی قیمتوں میں سے سب سے
چھوٹی قیمت کو۔



تصفیف کرتا ہے، لہٰذا لگ کی تصفیف کرتا ہے اور علیٰ ہذا۔]

اب یہ دیکھنے کے لئے کہ غلبہ مسلسل تفاعلوں کی صورت میں مسئلہ بالا عام طور پر صادق نہیں آتا ایسے تفاعل پر غور کرو جو اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ صفر کے سوا لہ کی اور قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت جیسے لہ ہے اور لہ = ۰ کے لئے تفاعل کی قیمت فرض کرو صفر ہوتی ہے۔ اس تفاعل کی علوی انتہا اسے جسکی طرف لہ لہ کو کافی چھوٹا لینے سے اسے اس قدر قریب لایا جاسکتا ہے جسقدر ہم چاہیں لیکن یہ کبھی اس انتہا کو نہیں پہنچتا۔

۱۹۔ تفاعل کی انتہائی قیمت۔ ان قیمتوں کے کل گروہ پر غور کرو جو ایک

تفاعل مارسل یا غیر مسلسل اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متغیر لہ ایک ثابت قیمت لہ کے ایک جانب کے کسی وقفہ میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ہر طرح لہ لہ کے قریب آتا ہے مگر کسی ثابت مقدار لہ کے قریب اس طرح آتا ہے کہ لہ لہ لہ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس بات کا یقین ہو سکتا ہے کہ لہ لہ کی اس قیمت یا اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے لہ لہ کی قیمت شمار سے کم ہوتی ہے جہاں لہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ ان شرائط کے تحت ہم کہتے ہیں کہ لہ لہ کی انتہائی قیمت ہے جبکہ لہ زیر بحث جانب سے لہ کے قریب آئے۔ اس ربط کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

نہا = لہ

لیکن ٹھیک محنت تو اس میں ہے کہ اس کی تخصیص بھی کر دی جائے کہ لہ لہ کے کس جانب سے قریب آ رہا ہے۔

متذکرہ بالا ربط کے ساتھ دفعہ (۸) کی تعریف پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل کی صورت میں

نہا ف (لہ) = ف (لہ) (۱۰)

حاصل ہوتا ہے۔ یعنی تفاعل کی انتہائی قیمت خود تفاعل کی قیمت پر منطبق ہوتی ہے اور یہ کہ اگر لام متغیر متبوع کی وسعت کے اندر واقع ہو تو لام خواہ کسی جانب سے لام کے قریب آئے یہ خاصیت درست ہے۔ لیکن اگر لام وسعت کے کسی سرے پر منطبق ہو تو لام کا وسعت کے اندر سے لام کے قریب آنا ضروری ہے۔

برعکس اس کے جب تک شرط (۱) پوری نہ ہو تفاعل سلسل نہیں ہو سکتا۔ اب ایسے تفاعل پر غور کرو جس کے متغیر متبوع کی وسعت مثبت لام کی سمت میں غیر محدود ہے۔ اگر لام کو مسلسل بڑھانے سے ما ایک ثابت قیمت لام کی طرف مائل ہو اس طرح کہ لام کو کافی بڑھانے سے ہم یہ یقین کر سکیں کہ لام کی اس قیمت اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے ا ما۔ لام ا شما سے چھوٹا ہوگا جہاں شما کوئی مقررہ مثبت مقدار ہے خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو تب لا ∞ کے لئے لام کو ما کی انتہائی قیمت کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں

$$\text{نہا} = \text{ما} = \text{لا} \infty$$

اسی طرح کی تعریف

$$\text{نہا} = \text{ما} \infty$$

۳۵ کی ہے جب یہ موجود ہو اور تفاعل کے متغیر متبوع کی وسعت منفی لام کی سمت میں غیر محدود ہو۔

۲۰۔ انتہائی قیمتوں سے متعلق عام مسائل۔

۱۔ تفاعلوں کے کسی محل ود تعداد کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۲۔ تفاعلوں کے کسی محل ود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام

انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۳۔ دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ انتہائی قیمتیں محدود ہوں اور مقسوم علیہ منفرد ہو۔

ان مسائل کے ثبوت کا طریقہ وہی ہے جو دفعہ (۱۲) میں دیا گیا ہے۔ اس دفعہ کے مسائل مسائل بالائی خاص صورتیں ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ 'ا' کے دو تفاعل 'ب' و 'ج' ہیں اور جس طرح 'ا' 'لا' کے قریب آتا ہے ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب 'ع' و 'ح' حاصل ہوتی ہیں۔ تب اگر ہم

$$ع = ع + ح، و = و + ح$$

لکھیں تو 'ح' اور 'ب' 'لا' کے تفاعل ہوں گے جنکی انتہائی قیمتیں صفر ہیں۔

اب

$$(ع + ح) - (و + ح) = ع - و = ع + ح + ح - و + ح$$

$$ع - و = ع + ح + ح - و + ح$$

$$\frac{ع - و}{و + ح} = \frac{ع}{و} - \frac{و + ح}{و + ح}$$

اور دفعہ (۱۲) کی طرح 'لا' کو کافی طور پر 'لا' کے قریب لاکر ہم مذکورہ بالا شرائط کے تحت بائیں طرف کو مطلق قیمت میں کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔

۲۱۔ مثالیں۔

ہم نے دفعہ (۱۹) میں یہ دیکھا ہے کہ ایک مسلسل تفاعل کی انتہائی قیمت متغیر متبوع 'لا' کی کسی قیمت 'لا' کے لئے خود تفاعل کی قیمت ہوتی ہے بشرطیکہ 'لا' کی اس قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت موجود ہو۔ لیکن متغیر متبوع کی چند تنہا یا سروں پر کی قیمتوں کے لئے یہ ممکن ہے کہ تفاعل کا وجود نہ ہو یا تفاعل غیر ممکن ہو جائے حالانکہ 'لا' کی ان قیمتوں کے لئے جو ان قیمتوں سے لاکر انتہائی قیمتیں

فرت کہتی ہیں تفاعل موجود ہو۔ یہی وہ صورتیں ہیں جنہیں ”انتہائی قیمت“ کا تخیل زیادہ اہم ہو جاتا ہے۔
مثال ۱۔ تفاعل

$$\frac{1}{2} - 1 - 2$$

یہاں ۱ کے درمیان لا کی کسی قیمت کے لئے تمام جبری اعمال جاری ہو سکتے ہیں مگر اس صورت کے جبکہ لا کی قیمت صفر ہو جائے۔ اس صورت میں کسر کی شکل صفر ہو جاتی ہے۔ اب خارج قیمت کی یہ تعریف ہے کہ اگر اس کو ب سے ضرب دیا جائے تو حاصل ہو اور چونکہ کسی محدود مقدار کو صفر سے ضرب دینے سے صفر حاصل ہوتا ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ صفر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اس کو ”غیر معین“ کہتے ہیں۔
بہر کیف دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نامہ کو ۱ + ۱ - لا سے ضرب دیکر ہم اس کو اس شکل

$$\frac{1}{2}$$

میں رکھ سکتے ہیں اور یہ کسر ۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سوا صفر قیمت کے

$$\frac{1}{2} - 1 - 2$$

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ یہ تفاعل مسلسل ہے اور لا = ۰ کے لئے اس کا وجود ہے اس لئے لا = ۰ کے لئے اس کی انتہائی قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔
مثال ۲۔ تفاعل

$$\frac{1}{2} - 1 - 2$$

پرخور کرد۔ یہاں جس طرح لا سلسل بڑھتا ہے یہ تفاعل غیر معین شکل $\infty - \infty$ اختیار کرنے پر مائل ہوتا ہے۔ لیکن تفاعل کو

۱

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

کی متماثل شکل میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا ∞ کے لئے اس کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔

مثال ۳۔ دے ہوئے رفاص کے امتیاز کے دور کو سخت حد کا تفاعل قرار دیں تو صفر اور ۱ کے درمیان حد کی تمام قیمتوں کے لئے دور کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن حد کی انتہائی قیمتیں صفر اور ۱ لینے پر اس کا وجود نہیں ہوتا۔ ہر کیف جس طرح حد صفر کے قریب آتا ہے دور ایک خاص انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس انتہائی قیمت کو علم حرکت میں اس طور پر موسوم کیا جاتا ہے کہ یہ لا انتہا چھوٹی فوس میں امتیاز کا وقت ہے

۲۲۔ چند خاص انتہائی قیمتیں۔

حسب ذیل مثالیں تفرقی احصا میں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔
۱۔ م کی تمام منطقی قیمتوں کے لئے

$$نسا = \frac{1^2 - 1^2}{1 - 1} = م \quad (۱)$$

اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو

$$نسا = \frac{1^2 - 1^2}{1 - 1} = (1^2 - 1^2 + 1^2 - 1^2 + \dots + 1^2 - 1^2) \quad (۲)$$

$$م = 1^2 - 1^2$$

کیونکہ ارتقام کی تعداد (م) محدود ہے اس لئے مجموعہ کی انتہائی قیمت مختلف ارتقام کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دفعہ ۲۰)۔

اگر م منطق کسر ہو تو فرض کر دو کہ یہ کسر $\frac{پ}{ق}$ ہے۔ نیز فرض کر دو کہ

$$لا = ما، و = ب$$

$$\frac{لا - ا}{لا - و} = \frac{ما - ب}{ما - ق} = \frac{پ - ق}{پ - ق}$$

نو
یکسر

$$\frac{پ - ب}{پ - ق}$$

$$\frac{ما - ب}{ما - ق}$$

$$\frac{ب - ق}{ب - ق}$$

کے مساوی ہے۔ بھلی صورت ہے اس کسر کے شمار کنندہ کی انتہائی قیمت پ ب پ اور ضرب نام کی انتہائی قیمت ق ب ق ہے۔ اس کے مطابق انتہا

$$\frac{پ - ب}{پ - ق} = \frac{پ - ق}{پ - ق} = ۱ - \frac{ق - ب}{پ - ق} = ۱ - \frac{ق - ب}{پ - ق}$$

ہے جو وہی ہے۔

اگر م منفی ہو تو فرض کر دو کہ م = - ن جس سے

$$\frac{لا - ا}{لا - و} = \frac{لا - و}{لا - و} = ۱ - \frac{و - ا}{لا - و} = ۱ - \frac{و - ا}{لا - و}$$

اگر ن منطق ہو تو اس کی انتہائی قیمت بھلی صورتوں کی مدد سے

$$۱ - \frac{و - ا}{لا - و} = ۱ - \frac{و - ا}{لا - و} = ۱ - \frac{و - ا}{لا - و}$$

ہے۔

۲۔ یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

$$\text{نسبہ} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱، \text{نسبہ} = \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} = ۱ \dots\dots\dots (۲)$$

اگر ہم دائرہ کی قوس کے 'طول' کی تعریف (دفعہ ۱۱) کی طرف رجوع کریں تو ان بیانات کی صداقت خود بخود واضح ہو جاتی ہے۔ شکل (۱۴) میں اگر زاویہ ن و ق چار قائمہوں کا $\frac{1}{4}$ ہوتو $n \times n$ ق، ن ضلعوں والے اندرونی منظم کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا اور ن (ت ن + ت ق) متناظر جانٹ کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا۔
اب اگر

$$\begin{aligned} \text{طہ} &= > n \text{ و } ۱ = \frac{\pi}{n} \\ \text{تو} \quad \text{وترن ق} &= \frac{n \text{ ل}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} \\ \text{اور} \quad \text{ت ن + ت ق} &= \frac{n \text{ ت}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} \end{aligned}$$

پس کسور

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} \text{ اور } \frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}}$$

سے وہ نسبتیں تعبیر ہوتی ہیں جو متذکرہ بالا کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے ہیں۔ پس ن جب مسلسل بڑھتا ہے تو ہر کسر انتہائی قیمت میں اکائی کی طرف مائل ہوتی ہے (دفعہ ۱۴)۔

استدلال بالا میں یہ مان لیا گیا ہے کہ طہ 'π کا زیر اضعاف ہے لیکن شکل میں زاویہ ن و ق کی قیمت کچھ ہی ہو ہر صورت میں
وترن ق > قوس ن ق اور ت ن + ت ق < قوس ن ق

یعنی $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} > ۱$ اور $\frac{\text{س طہ}}{\text{طہ}} < ۱$ ۔ پس ان کسروں کی علی الترتیب اوپر کی اور نیچے کی انتہا ہونی چاہئے اور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ انتہائیں اکائی کے سوا کچھ اور نہیں ہو سکتیں۔

ذیل کی عددی جدول سے یہ معلوم ہوگا کہ کس طرح متذکرہ بالا تفاعل طہ کو مسلسل گھٹانے سے اپنی مشترک انتہائے قریب آتے ہیں۔

ن	$\frac{\text{طہ}}{\pi}$	$\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$	$\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$
۴	۵۲۵	۵۹۰۰۳۲	۱۵۲۷۳۲۳
۵	۵۲۰	۵۹۳۵۴۹	۱۵۱۵۶۳۲
۱۰	۵۱۰	۵۹۸۳۶۳	۱۵۰۳۳۲۵
۲۰	۵۰۵	۵۹۹۵۸۹	۱۵۰۰۸۳۱
۳۰	۵۰۲۵	۵۹۹۸۹۷	۱۵۰۰۲۰۶
∞	۵۰	۱۵۰۰۰۰۰	۱۵۰۰۰۰۰

تیسرے اور چوتھے خانوں میں وہ نسبتیں درج ہیں جو ن ضلعوں واسطے اندرونی اور بیرونی یا حاطہ منتظم کثیر الاضلاع کے گھیسروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔

۲۳۔ صفاریات۔ جب کوئی متغیر مقدار کسی عمل میں انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مقدار آخر کار معدوم ہو جاتی ہے یا "لا انتہا چھوٹی" ہے۔

دو لا انتہا چھوٹی مقادیر مساوی کہلاتی ہیں جب ایک کو دوسری سے جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت ایک ہو۔ مثلاً طہ جب صفر انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے تو جب طہ اور طہ آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں (دفعہ ۲۲ مثال ۲)۔ لا انتہا چھوٹی مقداروں کے رتبوں میں تیز کرنا بعض اوقات ضروری ہو جاتا ہے پس اگر "و" و "و" برابر ہوں جو صفر کی طرف مائل ہوتی ہیں اور اگر نسبت $\frac{و}{و}$ محدود ہو اور صفر نہ ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ لا انتہا چھوٹی مقدار ہے جسکا

$$\text{سس طء} - \text{جب طء} = (\text{جب طء} \div \text{طء}) \times \text{جم طء} \div \text{طء} \times \text{طء} \dots (۲)$$

جب طء ۔ تو پہلے دو اجزائے ضربی میں سے ہر ایک انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ پس سس طء۔ جب طء تیسرے رتبہ کا صغاری ہے۔ شکل میں اس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ ن ت۔ ن ل آخر کار تیسرے رتبہ کا ہے جبکہ ن کی معیار ہو۔ اصول ذیل کو پیش نظر رکھ کر ہم مختلف دلیلوں کو اختصار سے ساتھ بیان کر سکتے ہیں خصوصاً ایسی صورتوں میں جبکہ احصا کو ہندسہ اور علم حیل میں استعمال کیا جائے۔ اگر عا اور بیہ ایک ہی رتبہ کے دو صغاریات ہوں اور اگر جہا اور بیہ دوسرے صغاریات ہوں جو آخر کار بالترتیب عا اور بیہ کے مساوی ہو جائیں تو

$$\text{نسا} \left(\frac{\text{عہا}}{\text{بیہا}} \right) = \text{نہسا} \left(\frac{\text{عہا}}{\text{بیہا}} \right) \dots (۳)$$

$$\text{کیونکہ} \quad \frac{\text{عہا}}{\text{بیہا}} = \frac{\text{عہا}}{\text{عہا}} \times \frac{\text{بیہا}}{\text{بیہا}} \times \frac{\text{عہا}}{\text{عہا}} \dots (۴)$$

اور بائیں طرف کے پہلے دو اجزائے ضربی کی انتہائیں ہو جب فرض ایک کے مساوی ہیں۔ دفعہ ۲۰ سے نتیجہ زیر بحث حاصل ہو جائیگا۔ جب کوئی نتیجہ مقدار و دوران عمل میں بالآخر کسی قابل قیاس مقدار سے بھی بڑھ جاتی ہو تو اس کو 'لا انتہا بڑی' مقدار کہا جاتا ہے۔ اور اگر اس قسم کی کسی مقدار کو معیار قرار دیا جائے تو کسی دوسری مقدار کو کم، وہیں رتبہ کی لا انتہا بڑی مقدار کہا جاتا ہے جبکہ $\frac{۱}{۲}$ کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو۔

اشکۃ نمبری ۱

(جبری تفاعل)

۱۔ ایک ہی شکل میں لا^۱ کی ترتیبات حسب ذیل صورتوں میں معلوم کرو:-

* اس اصول کے استعمال کی اچھی مثال دفعہ ۶۳ میں ملے گی۔

$$n = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$$

جگہ (۱) کی وضاحت . سے ۲ تک ہر

$$(1) \quad (1-n)(2-n)(3-n) \dots (n-1)$$

$$(2) \quad (1-n)(2-n) \dots (n-1)$$

$$(3) \quad (1-n) \dots (n-1)$$

$$(4) \quad \sqrt{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}$$

$$(5) \quad \frac{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}$$

$$(6) \quad \frac{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}$$

$$(7) \quad \frac{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}$$

$$(8) \quad \frac{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}{(1-n)(2-n) \dots (n-1)}$$

کی ترتیبات کیجئے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$2(1-n) + 5(2-n) - 5(3-n) = 0$$

کی ایک اصل - ∞ اور - ۱ کے درمیان ، دوسری اصل - ۱ اور صفر کے درمیان اور تیسری اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

* پیمانہ کے مناسب نمبروں کو بہت احتیاط سے کھینچنا چاہئے۔ اس مقصد کے لئے چھوٹے مربعوں والے مربع دار کاغذ کا استعمال مفید ثابت ہوگا۔ ضمیمہ میں (۱) 'ب' 'ج' جدولوں میں اعداد کے مربع ، جذر المربع ، اور ان کے متکافی دئے گئے ہیں جن سے حسابی عمل میں بغض اوقات آسانی پیدا ہو جائے گی۔

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۲ لا^۲ + ۳ لا^۱ + ۳ لا^۰ = ۵$$

کی تین حقیقی اصلیں ہیں۔ تقریبی طور پر ان کے مقامات معلوم کرو۔

$$۵۔ مساوات \quad ۲ لا^۲ - ۳ لا^۱ - ۲ لا^۰ = ۱۰$$

کی اصلوں کے مقامات کی تعین تقریبی طور پر کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ طاق درجے کی ہر جبری مساوات کی کم سے کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور جفت درجے کی ہر مساوات میں جس کی پہلی اور آخری رٹوں کے سر مختلف علامت ہوں کم سے کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں جن میں سے ایک مثبت اور دوسری منفی ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲

(دائری تفاعل)

۱۔ تفاعل ذیل کی ترتیبیں کیجئے۔

$$(۱) \quad ۱م لا، ۱م لا، ۱م لا + ۱م لا$$

$$(۲) \quad ۱ج لا، ۱ج لا، ۱س لا$$

$$(۳) \quad ۱ج لا + ۱ج لا، ۱ج لا + ۱ج لا$$

$$(۴) \quad ۱ج لا، ۱ج لا، ۱ج لا$$

۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۱ج لا - ۱ج لا = ۰$$

کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۳

(تواتر)

۱۔ مقادیر

$$\frac{۲}{۱+۲}$$

کی علوی اور منعلی انتہائیں معلوم کر دیجیے $۱' ۲' ۳' \dots$
۲۔ اگر تو اتر

$۱' ۲' ۳' \dots ۱۰'$

میں $۱۰' = ۳' + ۷'$
جہاں $۳'$ اور $۷'$ مثبت ہیں اور $۳' >$ اتوار کی انتہا $\frac{۷}{۳-۱}$ ہوگی خواہ $۱۰'$ کی
کچھ ہی قیمت ہو۔
۳۔ مقادیر

$\dots \dots \dots \{ \sqrt{۲۱+۲۱} + ۲ \} \dots \dots \dots$

جہاں $۱۰' = \sqrt{۲۱+۲۱}$
ایک صعودی تو اتر باقی ہیں جس کی انتہا ۲ ہے۔

۴۔ اگر $۱۰' = ۱۰' + ۱۰' = ۱۰'$

جہاں $۱۰'$ اور $۱۰'$ مثبت ہیں تو تو اتر صعودی یا نزولی ہوگا بموجب اس کے کہ $۱۰'$ مساوات
 $۱۰' = ۱۰' + ۱۰'$ کی مثبت اہل سے چھوٹا یا بڑا ہو اور ہر صورت میں اس کی انتہا یہ اہل ہو۔
۵۔ تو اتر کی نوعیت کی جانچ کر جس میں

$\frac{۱۰'}{۱+۱۰'} = ۱۰'$

جہاں $۱۰'$ مثبت ہے۔ ثابت کر دے کہ اگر $۱۰'$ مثبت ہو تو تو اتر کی انتہا مساوات
 $۱۰' + ۱۰' = ۱۰'$ کی مثبت اہل ہے۔

۶۔ ایسی مقداروں کا تو اتر معلوم کر دو مساوات

$۱۰' = ۱۰' + ۱۰'$

کی مثبت اہل کے قریب آئیں۔

۷۔ ثابت کر دو کہ قانون

$$\frac{لا}{سن} = \frac{لا}{سن}$$

کے بموجب بننے والے تو اتر کی انتہا مساوات سن لا = لا کی اقل مثبت اصل ہے جہاں لا اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۸۔ اگر لا اور ب کے درمیان حسابی اور موسیقی اور اسطبا بالترتیب $\frac{لا}{ب}$ اور $\frac{ب}{لا}$ ہوں اور لا اور ب مثبت ہوں تو ایسے تو اتر کی مشترک انتہا $\frac{لا}{ب}$ ہوتی ہے

جنکی ن دیں ارقام بالترتیب $\frac{لا}{ب}$ اور $\frac{ب}{لا}$ ہیں۔

۹۔ اگر $\frac{لا}{ب} = \frac{۱}{۱۰}$ ($\frac{لا}{ب} + \frac{ب}{لا}$) $\frac{۱}{۱۰} = \frac{لا}{ب}$ اور $\frac{ب}{لا} = \frac{۱}{۱۰}$ اور لا، ب مثبت ہوں تو تو اتر جن کی ن دیں ارقام $\frac{لا}{ب}$ اور $\frac{ب}{لا}$ ہیں ایک مشترک انتہا

کی طرف مستحق ہوتے ہیں۔

(اس انتہا کو لا اور ب کے درمیان حسابی ہندسی اوسط کہتے ہیں)

اسٹل نمبری ۴ (تفاضلوں کی انتہائی قیمتیں)

۱۔ لا کے لئے

$$\frac{جب}{لا} ، \frac{سن}{لا}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کر دو۔

۲۔ لا کے لئے

$$\frac{جب}{لا} ، \frac{سن}{لا}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

$$۳ - \frac{۶}{۱۱} = \frac{۶}{۱۱} \text{ جب } \frac{۱}{۱۱} = ۱ - \frac{۱}{۱۱} \text{ جم لا}$$

کی ترسیں بناؤ۔

۴ - ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱۱} = \frac{۱}{۱۱} \text{ (قط لا - مس لا) } = ۰$$

۵ - ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱۱} = \frac{۱}{۱۱} \text{ (قط لا - مس لا) } = ۰$$

۶ - ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱۱} = \left\{ \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۱۱} \right\}$$

۷ - ایک دس ہوسے دائرہ کے اندرونی اور بیرونی منظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ جب 'ن' بڑا ہو تو ۲ ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رتبوں میں فرق ۲ ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رتبوں کے فرق کا $\frac{۱}{۱۱}$ ہوتا ہے۔

۸ - ایک خط مستقیم 'ا ب' اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم 'و لا' و 'ما' پر اس کے تقاطعوں 'و ا' و 'ب' کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ اگر 'ا ب' کے دو متصل محلوں کا نقطہ تقاطع 'ن' ہو اور 'ق' وہ نقطہ ہو جس پر زاویہ 'لا' و 'ما' کا نصف 'ا ب' کو قطع کرتا ہے تو 'ا ن' = 'ق ب'۔

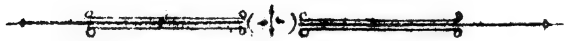
۹ - دائرہ کے نقطہ 'ا' میں سے وتر 'ا ن' کھینچا گیا اور 'ا' پر کے 'ماس' پر ایک نقطہ 'ت' اس طرح لیا گیا کہ 'ا ت' = 'ا ن'، اگر 'ت' محدودہ 'ا' میں سے گزرتو 'ا' قطر کو 'ق' پر لے تو 'ا ق' کی انتہائی قیمت جب 'ن' 'ا' کی طرف حرکت کرے دائرہ کے قطر کا دو چندان ہوتی ہے۔

۱۰۔ ایک خط مستقیم (ج) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم ولا، و ما پر اسکے نقطوں اور (ج) سے بنے والے مثلث (ا و ج) کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ (ج) کے دو متصل غلوں کے تقاطع کا انتہائی نقطہ (ج) کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

۱۱۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم (ج) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سر دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم ولا، و ما پر رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر (ج) کے دو متصل غلوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ن ہو اور و سے (ج) پر جو عمود کھینچا جائے اس کا پائین ل ہو تو $\angle ن = ۹۰^\circ$ (ج)۔

۱۲۔ ایک دائری قوس کے سروں پر اور اس کے وسطی نقطہ پر ماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان ماسوں سے بنے والے مثلث کا رقبہ آخر کار اس مثلث کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جس کے اس نقاط ماس ہوں۔

۱۳۔ اگر ن ج ن ایک ناقص کا کوئی ثابت قطر ہو اور ق ہ اس قطر کا کوئی معین اور اگر ق پر کا ماس ج ن ممدودہ کو ت پر ملے تو ثابت کرو کہ نسبت ت ن : ن ہ کی انتہائی قیمت جبکہ ن ہ لانتہا چھوٹا ہو ایک ہے۔

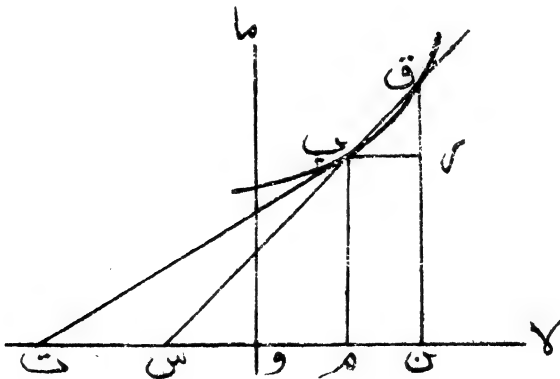


دوسرا باب

مشق تفاعل

۴۵

۲۴۔ تہید۔ ہندسی توضیحات۔ کسی منحنی کے دے ہوئے نقطہ پر
ماسی خط کی سمت دریافت کرنے کے سوال سے تفرقی احصا کی ابتدا ہوئی۔
فرض کرو کہ چ اور ق دو متصل نقطے ایک مسلسل منحنی ما = فدا (لا) ... (دا)
پر ہیں نیز چ اور ق ان کے معین ہیں۔ چ پر خط و لا کے
توانی ہے اور وتر چ ق محور لا سے ملتا ہے۔



شکل ۱۹

اگر نقطہ چپ کو ثابت رکھا جائے اور ق نقطہ چپ کے قریب لایا جائے تو یہ وتر عام ہندسی منحنی کی صورت میں ایک خاص انتہائی مقام چپ تک اختیار کرے گا اور ہم اسے نقطہ چپ پر ماسی خط کی تعریف قرار دیں گے۔ ایسا ممکن ہے کہ منحنی کے ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر وتر کا کوئی انتہائی مقام نہ ہو۔ ماسی خط کی سمت اس زاویے سے حاصل ہوتی ہے جو چپ چپ خط و کلا سے بناتا ہے یعنی شکل میں زاویہ چپ سے کلا کی انتہائی قیمت ہے۔
فرض کرو کہ

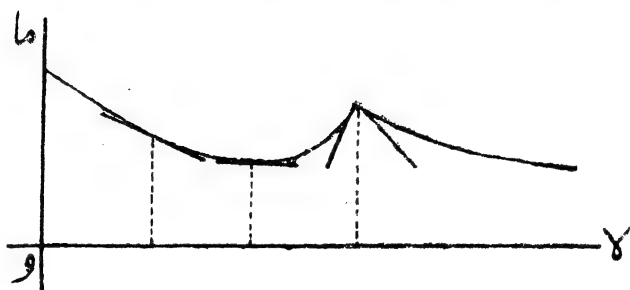
۴۶ و م = (لا، چپ م = ما، ون = (لا، مف لا، ق ن = ما، مف ما
تو سس چپ س لا = چپ م = ق ر = مف ما (۲)۔۔۔۔۔

اب سوال صرف اتنا ہے کہ کسر $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہائی قیمت دریافت کی جائے جبکہ مف لا کی انتہا صفر ہو۔ اس کی انتہائی قیمت کو

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \dots (۳) \quad \text{تقریم} \quad \left[\frac{dx}{dy} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \right]$
سے تعبیر کیا جاتا ہے، اسے ایک ہی علامت تصور کرنا چاہئے۔ کسی شکل کی انتہا حاصل کرنے کے طریقے کی یاد دہانی کے لئے برقرار رکھی گئی ہے۔ تخلیلاً اسی چیز کو فنا (لا) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے فنا (لا) کا شتق تفاعل کہتے ہیں۔

علامت (۳) سے جو منحنی کی خاصیت تعبیر ہوتی ہے اس کے لئے ہندسی نام تجویز کرنے میں بہت سہولت ہوگی۔ اس سخی میں ہم اصطلاح ”ڈھال“ کام میں لائیں گے۔ اگر ہم منحنی کے کسی نقطہ پر دائیں جانب ماسی خط دیکھیں تو ڈھال اس زاویہ کا شکلی ماس ہے جو ماسی خط محور لا کی مثبت سمت سے بناتا ہے۔ اگر یہ زاویہ منفی ہے تو ڈھال منفی ہوگا اور اگر ماسی خط و کلا کے متوازی ہے تو ڈھال صفر ہوگا۔ دیکھو شکل ۲۰

اکثر صورتوں میں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے ڈھال بھی خود لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اگرچہ ایسا ممکن ہے کہ ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر جہاں مماسی خط محور کا پر عمود وار ہو ڈھال لا انتہا ہو جائے۔ شکل میں ایسی صورت بھی دکھائی گئی ہے جبکہ ڈھال میں محدود مقدار کا توڑ یا عدم تسلسل ہے۔



شکل ۲۰

۲۵۔ مشتق تفاعل کی عام تعریف۔

چونکہ مشتق تفاعل کا تخیل ریاضی کی تمام شاخوں میں نہایت اہم ہے اس لئے اہم اس کی تعریف زیادہ باقاعدہ طور پر بغیر ہندسی مثالوں کی مدد کے درج کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ما، متبوع متغیر لا کا خاص وسعت میں ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اب اگر لا میں صف لا کا اضافہ کیا جائے جہاں لا + صف لا مذکورہ بالا وسعت میں واقع ہے اور اس کی وجہ سے ما میں صف ما کا اضافہ ہو تو لا کو ثابت مگر نسبت $\frac{\text{صف ما}}{\text{صف لا}}$ (۱) اضافہ صف لا کا تفاعل ہوگی۔

اب اگر صف لا اور اس کی وجہ سے صف ما سلسلہ وار کچھ قیمتیں اختیار کریں جنکی انتہا صفر ہو تو اس نسبت کی قیمت ایک معین اور واحد انتہائی

مقدار کی طرف مائل ہوگی۔ اس طرح حاصل شدہ قیمت کو ہم ما کا لحاظ لا کے مشتق تفاعل یا مشتق یا تفرقی سرکسٹے۔ اور اس کو علامت $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۲) سے ظاہر کریں گے۔

مختصر مشتق تفاعل (جب یہ وجود رکھتا ہو) اس نسبت کی انتہائی قیمت ہے جو تفاعل کے اضافہ کو متبوع متغیر کے اضافہ کے ساتھ ہے جبکہ دونوں اضافے لا انتہا چھوٹے ہو جائیں۔

اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا چاہئے کہ تعریف بالا میں ہم ایک خاص نسبت کی انتہائی قیمت کا ذکر کرتے ہیں نہ کہ مف ما اور مف لا کی انتہائی قیمتوں کی نسبت کا۔ مؤخر الذکر نسبت کی قیمت دریافت نہیں کی جاسکتی کیونکہ اس کی شکل غیر معین $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی واحد انتہائی قیمت ہے تو یہ سمجھنا چاہئے کہ متبوع متغیر کی وسعت کے اندر لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے اس نسبت کی انتہا صرف ایک ہی ہے خواہ مف لا مثبت جانب سے صفر کی طرف مائل ہو خواہ منفی جانب سے۔ بعض صورتوں میں ایسا ہوتا ہے کہ مف لا کے مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف آنے سے نسبت کی انتہا مختلف ہوتی ہے۔ ایسے حالات میں مذکورہ بالا تعریف کے مطابق اصل مشتق وجود نہیں رکھتا، لیکن ان انتہائی قیمتوں کو ہم بالترتیب ”دائیں“ اور ”بائیں“ مشتق کہہ سکتے ہیں۔ دیکھو شکل ۲۰۔

اس سوال کا جواب کہ نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی کوئی معین انتہائی قیمت ہے

یا نہیں، تفاعل ما کی نوعیت پر منحصر ہے۔ جن تفاعلوں کے لئے یہ انتہا معین اور یگانہ ہو (سوائے لا کی چند اکیلی قیمتوں کے لئے) انہیں ہم ”قابل تفرق تفاعل“

کہیں گے۔ باقی تمام تفاعل جو قابل تفرق نہیں ہیں ابتدائی سے علم احصا کی حدود سے باہر کر دیئے گئے ہیں۔

قابل تفرق تفاعل لازماً مسلسل ہوگا لیکن اس دعوے کا عکس صحیح نہیں ہے۔ مگر ایسے تفاعل جو مسلسل ہیں لیکن تفرق نہیں ہو سکتے وہ علم یا ضمی میں بہت کم ملتے ہیں۔

مثبت تفاعل کے لئے علاوہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے اور بھی بہت سی علامتیں ہم استعمال کریں گے۔ عموماً اس کو ظاہر کرنے کے لئے تفاعل کی علامت پر بزرگ لکھا جائیگا۔

پس اگر $\text{فما} = \text{فما}^{(۱)}$.. (۱) مثبت تفاعل کو فما یا جیسے کہ اوپر بیان ہو چکا ہے $\text{فما}^{(۱)}$ سے تعبیر کیا جائیگا۔

$$\text{اب چونکہ } \frac{\text{عفا}^{(۱)}}{\text{مف}^{(۱)}} = \frac{\text{فما}^{(۱)} + \text{مف}^{(۱)}}{\text{فما}^{(۱)}} - \text{فما}^{(۱)}$$

اس لئے $\text{مف}^{(۱)}$ کی بجائے ھ لکھنے سے

$$\text{فما}^{(۱)} = \text{فما}^{(۱)} - \frac{\text{فما}^{(۱)} + \text{ھ}^{(۱)}}{\text{ھ}^{(۱)}} - \text{فما}^{(۱)} \dots \dots \dots (۲)$$

آئندہ یہ ضابطہ اکثر استعمال کیا جائیگا۔

کسی دئے ہوئے تفاعل کے تفرقی سرور یافت کرنے کے عمل کو ہم ”تفرق کرنا“

کہیں گے۔ اگر لا متبوع ”منعبر موتو“ فرلا ”فرما“ اس عمل کی علامت تصور کیا جاسکتی

ہے اور اسے واحد علامت ”عف“ سے ظاہر کرنے میں زیادہ سہولت ہوگی۔ پس لکھا جائیگا لا کے مابین تفرقی سر کے لئے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ فرما اور عفا مابین سے کوئی سی بھی علامت}$$

کا ہمیں لائی جاسکتی ہے۔ نوٹ [عال تفرق کا اختصار عفا = D]

ترجمہ

۲۶۔ طبیعی مثالیں۔ مختلف مضامین میں مشتق تفاعل کے استعمال کی

اہمیت اس بات پر مبنی ہے کہ اس سے اصل تفاعل کے اضافہ کی شرح کا ناپ حاصل ہوتا ہے جبکہ متبوع متغیر میں اکائی کا اضافہ ہو۔

مثلاً ہم پہلے ایک نقطہ کی خطی حرکت پر غور کریں گے۔ خط حرکت پر کسی مقررہ مبداء سے تحریک نقطہ کا فاصلہ میں وقت کا (جو کسی مقررہ آن سے ناپا گیا ہو) تفاعل ہو گا۔ ان تغیروں میں رشتہ اکثر ”رسمی“ مقامات کے معنی سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور معین میں کے اگر وقت

مف ت میں فاصلہ مف س ط ہو تو کسر مف س وقفہ مف ت

میں ’اوسط رفتار‘ کہلاتی ہے یعنی بہ الفاظ دیگر اگر کوئی نقطہ اس مستقل رفتار سے حرکت کرے تو وہ اسی وقفہ مف ت میں وہی فاصلہ مف س ط کریگا۔ انتہا میں جبکہ مف ت اور اس کی وجہ سے مف س لا انتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں تو اس اوسط رفتار کی انتہائی قیمت کو ہم اندرون تعریف آن ت پر کی رفتار کہیں گے۔ علم احصائی ترقیم میں رفتار و ذیل کی سادات سے حاصل ہوگی

$$و = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \dots \dots \dots (۱)$$

مذکور بالا رسمی تعبیر میں و مقامات کے معنی کا احوال ہے۔

اب رفتار و خودت کا تفاعل ہے۔ اس رشتہ کو ظاہر کرنے والا نمونی رفتار کی نمونی کہلاتا ہے۔ اگر وقفہ مف ت میں رفتار میں مف و کا اضافہ

ہو تو کسر مف ت کو اس وقفہ میں رفتار کے اضافہ کی اوسط شرح یا اوسط

اسراع کہتے ہیں۔ اوسط اسراع کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ت لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے، آن ت پر کا اسراع کہتے ہیں۔

اگر عا اس اسراع کو ظاہر کرے تو عا = $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \dots \dots \dots (۲)$

تشریحی تعبیر میں عمارت قاری منہنی کا ڈھال ہے۔ ایک استوار جسم کی صورت میں جو ایک ثابت محور کے گرد گھوم رہا ہے اگر جسم کسی معیاری مقام سے شروع ہو کر زاویہ طہ میں سے گھوم جائے تو اوسط زاویہ رفتار، وقفہ مفا ت میں مفا طہ ہوگی اور آن ت پر کی زاویہ رفتار، فرطہ مفا ت (۳) ہوگی۔

نیز اگر سے اس زاویہ رفتار کے لئے استعمال کریں تو وقفہ مفا ت میں ”اوسط زاویہ اسراع“ مفا سے مفا ت سے ظاہر ہوگا اور ”آن ت پر کا زاویہ اسراع“ فرطہ مفا ت (۴) سے۔

نیز کسی شے کی سلاح کا طول تیش (طہ) کا تفاعل ہوتا ہے۔ اگر تیش طہ پر ایک ایسی سلاح کا طول لا ہو جس کا طول کسی معیاری تیش (فرض کروہ: مٹی) پر اکائی ہے تو مفا لا تیش کے طہ سے طہ + مفا طہ تک جائے گا۔

میں سلاح کے خلی پھیلاؤ کی اوسط قدر ہے اور فرطہ تیش طہ پر پھیلاؤ

کی قدر یا مہر ہے۔ بطور دوسری مثال کے فرض کرو کہ ایک مانع ہے جو آزادانہ سلسلہ وار چند ایسی شکلیں اختیار کر سکتا ہے کہ دباؤ (د) اکائی کمیت کے حجم (ح) کا ایک معین تفاعل ہے۔

اگر حجم ح سے ح + مفا ح ہو جائے تو کسر مفا ح اس نسبت کا ناپ ہے جو حجم کی کو اصل حجم کے ساتھ ہے اور اس لئے اسے ہم ”پچکاؤ“ کہتے ہیں

اور فرما $\frac{1}{فرلا} = \frac{1}{نسا} = \frac{1}{(لا + لا + لا)} = \frac{1}{(لا)}$ (۴)
 تنفی علاستہ کی وجہ یہ ہے کہ جب 'لا' بڑھتا ہے تو ما گھٹتا ہے۔
 مثال ۴:- اگر ما = لا = لا (۵)

$$نمف ما = لا + لا - لا = \frac{لا}{لا + لا + لا}$$

$$\therefore \frac{مف ما}{مف لا} = \frac{1}{لا + لا + لا}$$

اس لئے انتہائیں جب 'لا' تو

$$\frac{1}{فرلا} = \frac{1}{لا} \dots \dots \dots (۶)$$

۲۸- معیاری تفاعلوں کا تفرق -

$$(۱) \dots \dots \dots (آ) \text{ اگر } ما = لا$$

$$\text{تو } \frac{مف ما}{مف لا} = \frac{(لا + مف لا) - (لا - لا)}{(لا + مف لا) - لا}$$

دفعہ ۲۲ (آ) میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ م کی تمام منطوق قیمتوں کے لئے مف لا ← کی صورت میں اس کسر کی انتہام لا^{۱-۲} ہے۔

$$\text{پس } \frac{فرما}{فرلا} = م لا^{۱-۲} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{مثال :- اگر } م = ۲ \text{ تو } \frac{فرما}{فرلا} = ۲ لا$$

$$\text{اور اگر } م = \frac{1}{۲} \text{ تو } \frac{فرما}{فرلا} = \frac{1}{۲} لا \text{ دیکھو دفعہ ۲۷}$$

$$(۲) \dots \dots \dots \text{ اگر } ما = جب لا$$

تو مف لا کی بجائے ہ لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جب (لا+ہ) جب لا}}{\text{ہ}} = \frac{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ ہ}}{\frac{1}{4} \text{ ہ}} \times \text{جم (لا+ہ)} \quad (۴)$$

اگر زاوے قوسی پیمانہ میں ناپے گئے ہوں تو دفعہ ۲۲ (۲) سے

$$\text{نسب} = \left[\frac{\text{جب (لا+ہ)}}{\frac{1}{4} \text{ ہ}} \right] = ۱$$

اور دوسرے جزو ضروری کی انتہائی قیمت جم لا ہے۔

$$\text{اس کے } \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا} \quad (۴)$$

طالب علم شکل (۱۴) صفحہ (۲۲) میں جب لا کی ترکیب پر غور کرنا چاہئے اور اس امر کی تصدیق کرنی چاہئے کہ منحنی کا ڈھال اس ضابطہ کے مطابق بدلتا ہے۔

$$\text{(۴)} \quad \text{اگر ما} = \text{جم لا} \quad (۵)$$

$$\text{تو } \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم (لا+ہ) جم لا}}{\text{ہ}}$$

$$= \frac{\text{جب } \frac{1}{4} \text{ ہ}}{\frac{1}{4} \text{ ہ}} \times \text{جب (لا+ہ)} \quad (۵)$$

نکودہ بالا اسی وجہ بنا پر اس کی انتہائی قیمت ہے

$$\text{(۶)} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جب لا} \quad (۶)$$

$$\text{(۷)} \quad \text{اگر ما} = \text{س لا} \quad (۷)$$

$$\text{تو } \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{س (لا+ہ) س لا}}{\text{ہ}}$$

$$= \frac{\text{جب (لا+ہ) جم لا - جب لا جم (لا+ہ)}}{\text{ہ جم لا جم (لا+ہ)}}$$

$$\frac{1}{\text{جم لا جم (لا ه)}} \times \frac{\text{جب ه}}{\text{ه}} =$$

اور انتہائیں

$$\text{فرما} = \frac{1}{\text{جم لا}} = \text{قط لا} \dots \dots \dots (۸)$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ما = سس لا کے منہی کا دھال نقاط عدم تسلسل کے درمیان ہمیشہ مثبت ہے۔ دیکھو شکل (۱۵) صفحہ (۲۲)۔

۲۹۔ سادہ قسم کے جملوں کو تفرق کرنے کے ضابطے۔ حاصل جمع کا تفرق۔ ۵۲

$$(۱) \dots \dots \dots \text{ج} + \text{ع} = \text{ما} = \text{فرما} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں ع متغیر لا کا مملوہ تفاعل ہے اور ج مستقل ہے۔

$$\text{پس} \quad \text{ما} + \text{مف} = \text{ع} + \text{مف} + \text{ج}$$

$$\text{مف} = \text{مف} + \text{ع}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{مف} + \text{ع}}{\text{مف} + \text{ع}} = \frac{\text{مف} + \text{ع}}{\text{مف} + \text{ع}}$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{\text{فرع}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \dots \dots \dots (۲)$$

اگرچہ یہ بالکل ظاہر ہے کہ تفرق کرنے میں جمع کیا ہوا مستقل غائب ہو جاتا ہے تاہم یہ امر نہایت ضروری ہے۔ اس کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ کسی سطحی کو کلیتاً ماحو کے متوازی ہٹا دینے سے دھال میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

$$(۲) \dots \dots \dots \text{اگر} \quad \text{ما} = \text{ع} + \text{و} \dots \dots \dots (۳)$$

جہاں ع اور و متغیر لا کے دئے ہوئے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۱ کے مطابق

$$\text{مف} + \text{ما} = \text{مف} + \text{ع} + \text{مف} + \text{و}$$

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{مف} + \text{ما}}{\text{مف} + \text{و}} = \frac{\text{مف} + \text{ع} + \text{مف} + \text{و}}{\text{مف} + \text{و}}$$

چونکہ ایک مجموعہ کی انتہائی قیمت علیحدہ علیحدہ رقموں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots (۴)$$

نیز اگر $\text{ما} = \text{ع} + \text{و} + \text{ط}$ (۵)
تو اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + (\text{ع} + \text{و}) \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{فرط}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots (۶)$$

اس طریقہ پر کے بعد دیگر سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تفاعلوں کی کسی محدود تعداد کے مجموعہ کا مشتق ان تفاعلوں کے جداگانہ مشتقات کا مجموعہ ہے۔

مثال :- جملہ $\text{لا}^1 + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \dots\dots\dots + \text{لا}^m + \text{لا}^m$

کا مشتق تفاعل $\text{م} \text{ لا}^1 + \text{لا}^2 + \dots\dots\dots + \text{لا}^m + \text{لا}^m$ ہے۔

۳۔ حاصل ضرب کا تفريق -

(۱) جہاں $\text{ج} = \text{ستقل}$ ہے اور $\text{ع} = \text{تغیر}$ کا تفاعل ہے،
تو $\text{ما} = \text{مف} + \text{ج} = (\text{مف} + \text{ع})$

اس لئے $\text{مف} + \text{ج} = \text{مف} + \text{ع}$
اور $\frac{\text{مف}}{\text{مفلا}} = \frac{\text{ج}}{\text{مفلا}}$

اس لئے انتہائیں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ج} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots (۲)$

پس مستقل جزو ضربی تفرق کرنے کے بعد بھی قائم رہتا ہے۔
 اس امر کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اگر کسی سختی کے معین ایک خاص نسبت
 میں تبدیل کئے جائیں تو وہ حال بھی اسی نسبت سے بدل جاتا ہے۔ دیکھو
 شکل ۲، صفحہ (۱۱۹)

(۲) اگر ما = ع و (۳)
 جہاں ع اور و دونوں لا کے تفاعل میں تو دفعہ ۱۲ کے مطابق
 مف ما = (ع + مف ع) (و + مف و) - ع و
 = و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

اور اس لئے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{و مف ع}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{ع مف و}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{مف ع مف و}}{\text{مف لا}}$

اور اس کی انتہا لینے سے اس اصول کے مد نظر کہ حاصل ضرب کی انتہا علیحدہ علیحدہ
 انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ہمیں ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

فر ما = و فر ع + ع فر و (۴)

اگر مساوات کے دونوں جانب ما = ع و سے تقسیم کئے جائیں

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{و فر ع}}{\text{ع}} + \frac{\text{ع فر و}}{\text{و}}$

اس نتیجہ کی آسانی سے توسیع کیجا سکتی ہے۔ پس اگر ما = ع و ط
 تو ہی = ع و ٹکنے سے ما = ہی ط

اس لئے اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے حاصل ہوگا

$\frac{\text{فر ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فر ہی}}{\text{ہی}} + \frac{\text{فر و}}{\text{و}} + \frac{\text{فر ط}}{\text{ط}}$

$\frac{\text{فر ما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فر ہی}}{\text{ہی}} + \frac{\text{فر و}}{\text{و}} + \frac{\text{فر ط}}{\text{ط}}$ (۵)

اور اسی طرح اجزاء کی کسی محدود تعداد کے لئے اگر ہم آخر الذکر ضابطہ کی عام

شکل کے دونوں جانب ما = ع و ط سے ضرب دیں تو ذیل کا
نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{وط} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \text{عط} \times \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{عو} \times \frac{\text{فوط}}{\text{فرلا}} \dots (۶)$$

الفاظ میں اسے اس طرح بیان کر سکتے ہیں: مختلف اجزاء میں سے ہر ایک کو باقی
باری تغیر مانکر اور باقی اجزاء کو مستقل مانکر لا کے لحاظ سے مشتق نکالو تو حاصل ضرب
کا مشتق تفاعل ان جداگانہ دریافت کئے ہوئے مشتقوں کا مجموعہ ہوگا۔

مثال ۱۰۔ اگر ما = ع × ع × م اجزاء تک = ع (۷)

$$\text{تو } \frac{1}{\text{ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} + \dots \text{م اجزاء تک}$$

$$= \frac{\text{فرع}}{\text{ع}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \dots (۸)$$

اس نتیجہ کا عام ثبوت جس میں م کے مثبت صحیح عدد ہونے کی قید نہیں ہے دفعہ
۳۲ میں دیا جائیگا۔

مثال ۱۱۔ اگر ما = جب لا جم لا (۹)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{جب لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \dots (\text{جم لا})$$

$$= \text{جم لا} \times \text{جم لا} - \text{جب لا} \times \text{جب لا}$$

$$= \text{جم لا} - \text{جب لا} = \text{جم لا} \dots (۱۰)$$

مثال ۱۲۔ اگر ما = لا جب لا (۱۱)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{جب لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \dots (\text{لا})$$

$$= \text{لا} \times \text{جم لا} + \text{لا جب لا} \dots (۱۲)$$

۳۱۔ خارج قسمت کا تفرق۔

فرض کرو کہ $\frac{ما}{و} = \dots\dots\dots (۱)$

جہاں عداد و تفریق کے معلومہ تفاؤل میں دفعہ ۱۲ کے مطابق

$$\frac{مف + ما = ۶ + مف = ۶}{و + مف = و} = \frac{۶}{و} = \frac{مف + ۶}{و + مف = و} = \frac{مف + ۶}{و + مف = و}$$

$$\frac{مف + ما}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا}$$

اور انتہا میں $\frac{فر لا}{و} = \frac{فر لا}{و} = \frac{فر لا}{و} = \dots\dots\dots (۲)$

۵۵

اسے الفاظ میں اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:- اگر کسی خارج قسمت کا مشتق نکالنا ہو تو نسب نا اور شمار کنندہ کے مشتق کے حاصل ضرب میں سے شمار کنندہ اور نسبت کے مشتق کا حاصل ضرب تفریق کرو اور اس حاصل تفریق کو نسب نا کے مربع سے تقسیم کرو۔

خاص شکل $\frac{ما}{و} = \dots\dots\dots (۳)$

خاص غور کے قابل ہے۔

$$\frac{مف + ما}{و + مف = و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و} = \frac{۱}{و}$$

$$\frac{مف + ما}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا} = \frac{مف + ۶}{مف + لا}$$

فرما $\frac{فر لا}{و} = \frac{فر لا}{و} = \frac{فر لا}{و} = \dots\dots\dots (۴)$

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام مسئلہ (۲) میں $۱ = ۶$ اور $\frac{فر لا}{و} = ۰$ رکھنے سے حاصل ہو سکتا تھا۔

مثال ۱۱:- $\frac{{}^2\text{لا} + \text{لا} + ۱}{{}^2\text{لا} + \text{لا} - ۱} = \text{ما}$ (۵)

یہاں $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = {}^2\text{لا} + ۱$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = {}^2\text{لا} + ۱ -$

پس $\frac{({}^2\text{لا} + \text{لا} + ۱)({}^2\text{لا} + \text{لا} - ۱) + ({}^2\text{لا} + \text{لا} - ۱)({}^2\text{لا} + ۱)}{{}^2({}^2\text{لا} + \text{لا} - ۱)} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

(۶) $\frac{({}^2\text{لا} - ۱) ۲}{{}^2({}^2\text{لا} + \text{لا} - ۱)} =$

مثال ۱۲:- اگر $\text{ما} = \frac{۱}{\text{ع}}$ (۷)

جہاں م مثبت صحیح عدد ہے تو

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - = \frac{۱}{\text{ع}^2} \times \text{م} \times \frac{۱-3}{\text{فرلا}} = - = \text{م} \times \frac{۱-3}{\text{ع}^2} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ (۸)

دیکھو دفعہ ۳۲

اس دفعہ کا ضابطہ دفعہ ۳۰ (۲) سے بھی مائل کیا جاسکتا ہے۔

اگر $\text{ما} = \frac{\text{ع}}{و}$ تو $\text{ع} = \text{ما و}$

اس لئے $\frac{۱}{\text{ع}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{و} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۹)

پس $\frac{۱}{\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{ع}} - \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{و} - \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ (۱۰)

یہ مذکورہ بالا ضابطہ (۲) کے معادل ہے۔

ذیل کی مثالیں ضروری ہیں۔

(آ) اگر $\text{ما} = \text{سس لا} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$ (۱۱)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جم لا فرلا} (\text{جب لا}) - \text{جب لا فرلا} (\text{جم لا})}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۲) \dots\dots\dots \frac{\text{جم لا} + \text{جب لا}}{\text{جم لا}} = \text{قط لا}$$

نتیجہ دفعہ ۲۸ (۳) کے مطابق ہے۔

$$(۱۳) \dots\dots\dots \text{اگر ما} = \text{م لا}$$

$$(۱۴) \dots\dots\dots \text{تو ہم حاصل کر سکتے ہیں } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{قم لا}$$

$$(۱۵) \dots\dots\dots \text{اگر ما} = \text{قط لا} = \frac{۱}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots \text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{جم لا فرلا} (\text{جم لا})} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

$$(۱۷) \dots\dots\dots \text{اور اسی طرح اگر ما} = \text{قم لا}$$

$$(۱۸) \dots\dots\dots \text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جم لا}}{\text{جب لا}}$$

جیسا کہ دفعہ ۲۵ میں بتایا گیا ہے اگر ہم لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے عمل کو علامت عف سے ظاہر کریں تو دفعات ۲۹ تا ۳۱ کے نتائج مختصر ذیل کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں۔

$$(۱۹) \dots\dots\dots \text{عف (ع+و)} = \text{عف+ع} \text{ و } \text{عف و}$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots \text{عف (ع-و)} = \text{عف-ع} \text{ و } \text{عف و}$$

$$(۲۱) \dots\dots\dots \text{عف (و/ع)} = \frac{\text{عف-ع} \text{ و } \text{عف و}}{\text{و}}$$

۳۲۔ تفاعل کے تفاعل کا تفرق۔

$$(۱) \dots\dots\dots \text{اگر ما} = \text{فا (ع)}$$

$$(۲) \dots\dots\dots \text{جہاں ع} = \text{ف (لا)}$$

اور علامتیں فا اور ف معلومہ تفاعلوں کو ظاہر کرتی ہیں تو ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{فا} (ع) \times \text{ف} (لا) \dots (۳)$$

اگر مفا لا، مفا ما، مفا ع ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو مثلاً

$$\frac{\text{مفا ما}}{\text{مفا لا}} = \frac{\text{مفا ما}}{\text{مفا ع}} \times \frac{\text{مفا ع}}{\text{مفا لا}}$$

اور چونکہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

ضابطہ (۳) کا مفید استعمال خطی حرکت کے نظریہ میں ہوتا ہے۔

اگر ہم دفعہ ۲۶ کے مطابق کسی متحرک نقطہ کی رفتار اور اسراع کو بالترتیب و اور ع سے تعبیر کریں تو

$$و = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \text{ اور } ع = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} \dots (۴)$$

اب اگر و کو طے شدہ فاصلہ میں کا تفاعل سمجھا جائے تو

$$ع = \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = و \frac{\text{فرو}}{\text{فرس}} \dots (۵)$$

اسی طرح ایک محور کے گرد گھومنے والے استوار جسم کی صورت میں زاوی اسراع ذیل کے جملہ سے ملے گا جبکہ زاوی رفتار کو طے کا تفاعل مان لیا جائے

$$\text{فرسہ} \times \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = \text{فرسہ} \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرطہ}} \dots (۶)$$

ضابطہ (۳) سے ذیل کے اہم نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$(۱) \quad \text{اگر } ما = \text{فا} (لا + ۱) \dots (۷)$$

تو مسئلہ (۳) میں $ع = لا + ۱$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = ۱$ رکھنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فأ (لا + لا)} \dots \dots \dots (۸)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اس کی ہندی تفسیر یہ ہے کہ نسخی کو کھینا لا مور کے متوازی ہٹا دینے سے دھال میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

$$(۹) \dots \dots \dots (۲) \quad \text{اگر ما = فأ (گ لا)}$$

۵۸

تو رکھو ع = گ لا پس $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{گ}$ اور

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{گ فأ (گ لا)} \dots \dots \dots (۱۰)$$

حاصل ہوتا ہے۔

(۱۱) اگر ما = عا جہاں م کوئی منطق مقدار ہے
تو فأ (ع) = عا اور فأ (ع) = م عا

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م عا} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \dots \dots \dots (۱۲)$$

خاص صورتوں میں جبکہ م = $\frac{۱}{۲}$ اور م = $\frac{۱}{۳}$ تو بالترتیب حاصل ہوتا ہے

$$(۱۳) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}} = \frac{۱}{\text{ع}۲} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \\ \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}} = \frac{۱}{\text{ع}۳} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \end{array} \right.$$

اب اوپر کے ضابطوں پر چند مثالیں دی جائیگی۔

$$(۱۴) \dots \dots \dots \text{مثال (۱)۔} \quad \text{اگر ما = جب آ لا}$$

یعنی ما = عا جہاں ع = جب لا

$$(۱۵) \dots \dots \dots \text{تو عفا ما = م عا} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{م جب آ لا جم لا}$$

مثال (۲)۔ اگر $\sqrt{لا - لا^۲} = ما$ (۱۶)

تو عف $\sqrt{لا - لا^۲} = \frac{۱}{۲} (لا - لا^۲) \times \frac{۱}{۲} (لا - لا^۲)$ عف $(لا - لا^۲)$

$$(۱۷) \quad \frac{لا}{\sqrt{لا - لا^۲}} =$$

مثال (۳)۔ اگر $\sqrt{لا - لا^۲} = ما$ (۱۸)

اس میں $ع = لا$ اور $و = \sqrt{لا - لا^۲}$ رکھیں تو اس سے پہلی مثال کی بنا پر
عف $ع = ا$ اور عف $و = \frac{لا}{\sqrt{لا - لا^۲}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اب کسر کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

$$\frac{\frac{لا}{\sqrt{لا - لا^۲}} + \sqrt{لا - لا^۲}}{\sqrt{لا - لا^۲}} = \frac{عف ع - عف و}{و}$$

$$(۱۹) \quad \frac{لا}{\sqrt{لا - لا^۲}} =$$

۳۳۔ مقلوب تفاعلوں کا تفرق۔

اگر ما متغیر $لا$ کا مسلسل تفاعل ہو تو چند شرائط نے ماتحت (دیکھو دفعہ ۱۶)
جو عموماً علم ریاضی کے عام تفاعلوں کی صورت میں پوری ہوتی ہیں $لا$ متغیر ما
کا مسلسل تفاعل ہوگا۔

اگر $لا$ اور ما کے متناظر اضافے مف $لا$ ، مف ما ہوں تو مثلاً

$$\frac{مف ما}{مف لا} \times \frac{مف لا}{مف ما} = ۱$$

پس چونکہ حاصل ضرب کی انتہا ان اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب سے
سادہ ہے

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1 \dots\dots\dots (۱)$$

پس اگر یہ پہلے فرض کر لیا جائے کہ ما بلماظ لا کے قابل تفرق تفاعل ہے تو نتیجہ نکلتا ہے کہ عموماً لا متغیر ما کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ اور یہ دونوں مشتق تفاعل ایک دوسرے کے تنکافی ہونگے۔ اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ سنخی کا ماس لا اور ما محوروں سے نیم زاوے بناتا ہے۔
ذیل کی صورتیں ضروری ہیں۔

$$(۱) \quad \text{اگر} \quad \text{ما} = \text{جب} \quad \text{لا} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{تو} \quad \text{لا} = \text{جب} \quad \text{ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جم} \quad \text{ما}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{جم} \quad \text{ما}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}} \dots\dots\dots (۳)$$

$$(۲) \quad \text{اگر} \quad \text{ما} = \text{جم} \quad \text{لا} \dots\dots\dots (۴)$$

$$\text{تو} \quad \text{لا} = \text{جم} \quad \text{ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = - \text{جب} \quad \text{ما}$$

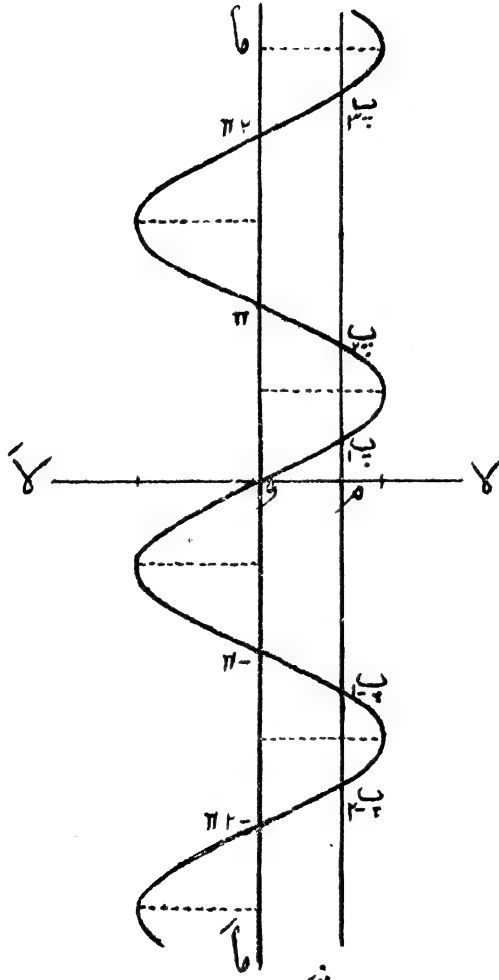
$$\text{اور اسلئے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \text{جب} \quad \text{ما} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}} \dots\dots\dots (۵)$$

ان نتیجوں میں مبہم علامت کے لئے ذیل کی وجہ دی جاسکتی ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ اگر ما = جب لا تو ما متغیر لا کا کثیر القیمت تفاعل ہے یعنی ± 1 کے درمیان لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوتا ہے۔ ان میں سے بعض قیمتوں کے لئے فرما

مثبت ہے اور بعض کے لئے منفی ہے۔ دیکھو شکل ۲۱ صفحہ (۸۶) اور اسی طرح جم لا کے لئے۔

مردجہ قرار داد کے مطابق اگر ہم جب لا سے وہ زاویہ سمجھیں جو

- $\frac{\pi}{4}$ اور $+\frac{\pi}{4}$ کے درمیان واقع ہے اور جبکہ جیب لہ کے مساوی ہے تو
 فریلا (جیب لہ) $= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$ (۶)



شکل ۲۱

اسی طرح اگر جہم $\frac{1}{n}$ کو صفر اور π کے درمیان محدود کر دیا جائے

تو $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) \dots (۷)$

اگر $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) \dots (۸)$

تو $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$

اسلئے $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) \dots (۹)$

اس صورت میں کوئی بہم غلاست نہیں ہے۔ $\frac{1}{n}$ کی ہر قیمت کے لئے
 ماکہ لا انتہا قیمتوں کا سلسلہ ہے لیکن ہر ایک کے لئے $\frac{1}{n}$ کی قیمت
 وہی ہے کہ نہ کہ مخفی $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$ کے متناظر نقطوں پر ماسی خطوط متوازی
 ہیں۔ (مخصوص ۲ صفحہ ۸۹)۔

مثال ۱۔ اگر $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$

تو $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$

اب $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$

یہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

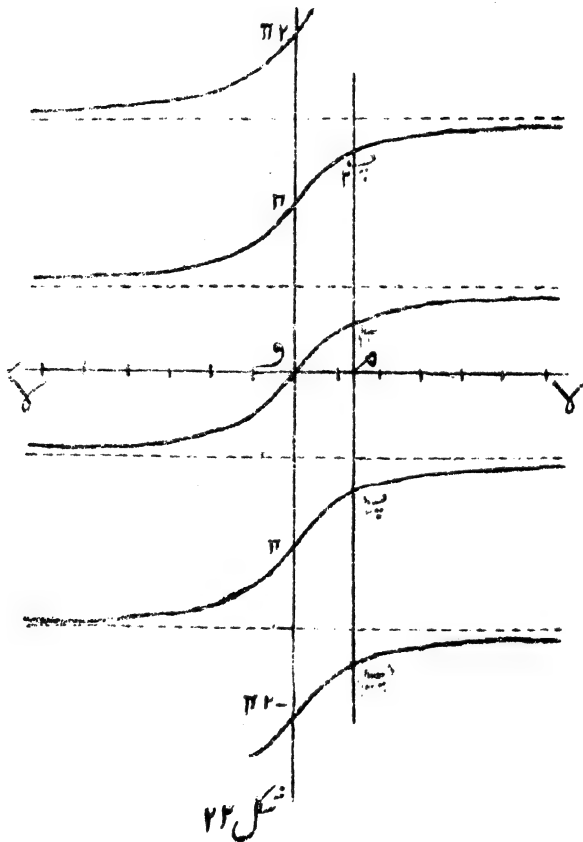
$\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right)$

پس $\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \right) \dots (۱۱)$

$\frac{1}{n}$ دس طہ رکھنے سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

جب $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$ = مس π اس سے ظاہر ہے کہ اوپر کا نتیجہ ضابطہ (۹) کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ فرض کر دو کہ $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$ = مس π (۱۲)



شکل ۲۲

اگر $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$ کی بجائے $\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$ لکھیں تو

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \frac{1}{2\text{ع} + 1} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{نیز } 1 + \text{ع} = \frac{2}{(2\text{ع} + 1) + 1} \text{ اور } \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{2}{(2\text{ع} + 1) + 1} \times \frac{1}{2\text{ع} + 1}$$

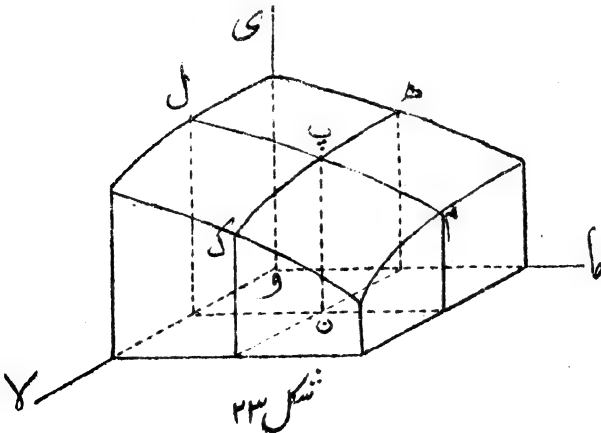
$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1 - 2\text{ع}}{(2\text{ع} + 1) + 1} \quad (۱۳)$$

۳۴۔ دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل۔ جزوی مشتق

اگرچہ اس کتاب کا اصل مقصد صرف ایک متبوع متغیر کے تفاعل پر غور کرنا ہے لیکن ابتدائی سے زیادہ عام نظریہ کے خیالات اور تنظیم سے واقف ہونا بعض اوقات مفید ثابت ہو سکتا ہے۔

کئی مقدار دو یا زیادہ متبوع متغیروں (لا، ما، ...) کا تفاعل اس وقت کہلاتی ہے جبکہ وہ بالذکر قیمتوں کے جواب میں جو اختیاری اور ایک دوسرے سے بے تعلق ہو سکتی ہیں تان متغیر کا وجود ہو۔ پھروری ہے کہ ہر صورت میں متبوع متغیروں کی قیمتیں الکی جدا گانہ حد کے اندر لی جائیں پس اگر ایک دی ہوئی سطح پر کوئی نقطہ چا ہوا اور پ ن کسی ثابت انجی ستوی پر نمود ہو تو بلندی چا ن نقطہ ن کے نمود (لا، ما) کا تفاعل ہے۔

(۶۳)



اسی طرح طبیعیات میں گیس کا دباؤ دو متبوع متغیروں حجم (فی اکالی کیت) اور
تپش کا تفاعل ہے۔ تفاعلی رشتہ شکل ذیل کی مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ع = فہ (لا، ما،)^(۱)
نمذورہ بالا سطح کی خاص صورت میں اگر ہم بلندی پ ن کو ی سے ظاہر کریں تو
ی = فہ (لا، ما،)^(۲)

تسلسل کی تعریف کو (جو دفعہ ۸ میں دی گئی ہے) موجودہ صورت میں اس
طرح توسیع دیجاسکتی ہے۔ تفاعل فہ (لا، ما،) متبوع متغیروں
لا، ما، کی قیمتوں کے خاص جٹ کے لئے مسلسل کہلائیگا اگر کسی
دی ہوئی مقدار (جو کتنی ہی چھوٹی ہو) کے جواب میں (صفر سے مختلف)
ایک مقدار صہ ایسی دریافت ہو سکے کہ اخافوں

مف (لا، مف، ما،) کی صہ سے کم تمام مطلق قیمتوں کے لئے
فہ (لا، مف، لا، ما، مف، ما،) اور فہ (لا، ما،) کے فرق
کی مطلق قیمت صہ سے کم ہو۔

پس دو متبوع متغیروں کی خاص صورت میں (جس کو شکل میں دکھایا گیا
۶۴ ہے) شرط تسلسل کا مفہوم یہ ہے کہ مستوی (لا، ما،) کے گروہ ایک تسلسل ایسا
جاسکتا ہے کہ اس متغیل کے اندر کے تمام نقطوں کے مقیموں کا فرق
پ ن سے صہ کی نسبت کم ہو جہاں صہ کتنی ہی چھوٹی مقدار ہو سکتی ہے

اب فرض کرو کہ تفاعل ع = فہ (لا، ما،)^(۳)
مسل ہے اور تمام متبوع متغیر سوائے (لا) کے متقل رکھے جاتے ہیں،
تب یہ فرض کر کے کہ ع متغیر (لا) کا قابل تفرق تفاعل ہے اسکا مشتق تفاعل

بلحاظ لا کے ع کا جزوی تفرقی سر یا جزوی مشتق کہلاتا ہے اور ہم اسے جف ع
جف لا سے تعبیر کریں گے۔

نوٹ:۔ علامت "جف" جزوی تفرق کا اختصار ہے جف ما = جف لا (سبرجم)

$$\text{پس جف ۶} = \text{نہا} \quad \text{فہ (لا + مفا + ما'...)۔ فہ (لا' ما'...)۔ (۴)} \\ \text{جف لا} = \text{مفا لا} - \text{مف لا}$$

$$\text{اسی طرح جف ۶} = \text{نہا} \quad \text{فہ (لا + مفا + مفا' ما'...)۔ فہ (لا' ما' مفا'...)۔ (۵)} \\ \text{جف ما} = \text{مفا ما} - \text{مف ما}$$

سطح (۲) کی صورت میں ظاہر ہے کہ اگر سطح کو چپ میں سے مستوی سے ولا اور سے ویا کے متوازی مستویوں سے کاٹا جائے تو جف می اور جف می

بالترتیب ان تراشوں کے ڈھال ہیں۔ شکل میں یہ تراشیں ہلک اور مل م ہیں۔ مثال ۱۔ اگر می = لا' ما' مان (۶)

$$\text{تو جف می} = \text{م لا' مان} \quad \text{اور جف می} = \text{ن لا' مان} \quad \text{جف ما} \quad \text{(۷)}$$

مثال ۲۔ اگر فرنز کر لیں کہ گیس کے دباؤ (د) 'جم (ح) 'اوتیش (طہ) میں ذیل کارشتہ ہے

$$\text{د} = \frac{\text{ح طہ}}{\text{جم}} \quad \text{(۸)}$$

$$\text{تو جف د} = \frac{\text{ح طہ}}{\text{جم}} \quad \text{اور جف د} = \frac{\text{ح}}{\text{جم طہ}} \quad \text{(۹)}$$

۳۵۔ تفسینی تفاعل۔

$$\text{فہ (لا' ما') = (۱)}$$

کے نمونہ کی مساوات عموماً ما کو لا کے تفاعل کی شکل میں بیان کرتی ہے۔ کیونکہ اگر ہم لا کو کوئی قیمت دیں تو مایں حاصل شدہ مساوات کی ایک یا زیادہ معین اصلیں ہوں گی۔ یہ اصلیں حقیقی یا خیالی ہو سکتی ہیں لیکن ہم صرف ان صورتوں پر غور کرنے جن میں خاص حدود کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مای (کم از کم) ایک حقیقی اصل وجود رکھتی ہو۔ اصطلاح تفسینی تفاعل

اس طور پر معلوم کئے ہوئے تفاعلوں کے لئے استعمال کی جاتی ہے متقابل ایسے
تفاعلوں کے جیسے

$$\text{ما} = \text{ف (لا)} \dots \dots \dots (۲)$$

جہاں ما تصریحی طور پر لا کی قوم میں دیا گیا ہے۔

$$\text{فما} = \text{ف (لا، ما)} \dots \dots \dots (۳)$$

اگر سطح کی مساوات تصور کی جائے تو مساوات (۱) ستوی (می) = س کے
قطع کی ہوئی سطح کی تراش کی مساوات ہے۔ اگر ستوی لا ما کو افقی مانا جا
تو می = ج کی تراشیں (جہاں ج کی مختلف مستقل قیمتیں ہیں) سطح کے
نقشی خطوط (Contour-lines) کہلاتے ہیں۔

اگر تفصیلی تفاعل کو تفریق کرنا مقصود ہو تو ممکن ہے کہ پہلے مساوات (۱) کو
ما کے لئے حل کر لیا جائے تاکہ وہ شکل (۲) میں تبدیل ہو جائے۔ تاہم ایسی
صورتوں کے لئے جن میں یہ طریقہ تکلیف دہ یا غیر ممکن ہو کوئی قاعدہ دریافت کرنا
مفید ثابت ہوگا۔ فی الحال ہم صرف (لا، ما) کے منطبق صحیح تفاعل فم (لا، فما)
پر غور کریں گے۔ منطبق صحیح تفاعل اسے وہ تفاعل مراد ہے جہاں نمونہ (۱) لا، ما
کی ارقام کے محدود سلسلہ کا حاصل جمع ہو جہاں م اور ن صحیح اعداد
۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲ کی رو سے
مشتق تفاعل بھی صفر ہوگا۔

اب دفات ۲۸، ۳۰، ۳۲ کی رو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر}} (\text{لا، ما}) = \text{م لا}^۲ \text{ما}^۱ + \text{ن لا}^۱ \text{ما}^۱۰ \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$$

اس لئے اگر فما (لا، ما) = ۳ لم ن لا ما (۴)

$$\text{تو } ۳ لم ن لا ما^۲ + ۳ لم ن لا ما^۱۰ \frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \dots \dots \dots (۵)$$

دفعہ ۳۴ کی ترقیم کے مطابق یہ شکل ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \dots\dots\dots$$

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \dots\dots\dots$$

چوتھے باب میں ثابت کیا جائیگا کہ نتائج (۶) اور (۷) تفاعل فہ (لا، ما) کی اس خاص صورت تک ہی محدود نہیں ہیں۔ تاہم یہ خاص صورت اکثرندہ سی اطلاعات کے لئے کافی ہے۔

امثلہ

۱۶۶

(تفریق ابتدائی اصولوں سے)
ابتدائی اصولوں سے سوالات آٹھ کے تفاعلوں کے شق دریافت کرو۔

$$۱- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

$$۲- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

$$۳- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

$$۴- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

$$۵- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

$$۶- \quad \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱} , \frac{۱}{۱}$$

مس = عت + ۱/۲ عت ہو جہاں ع اور ص مستقل ہیں تو
ثابت کرو کہ وقت پر رفتار ع + صت ہے اور اسراع مستقل ہے۔

- ۷۔ مستقل پیش والی ایک گیس کے دباؤ اور حجم میں رشتہ $d \propto \frac{1}{P}$ مستقل ہے ثابت کرو کہ کبھی ٹیگ مذکور مساوی ہے۔
- ۸۔ اگر کسی دائرہ کا نصف قطر ایک فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہو تو رقبہ کی شرح اضافہ مربع فٹ فی ثانیہ اس اک میں دریافت کرو جبکہ نصف قطر ایک فٹ ہے۔
- ۹۔ اگر کسی دائرہ کا رقبہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہو تو ثابت کرو کہ محیط کے اضافہ کی شرح نصف قطر کی معکوس نسبت سے ملتی ہے۔
- ۱۰۔ مرکزہ اور نصف قطر ایک فٹ والے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ (اے) ہے ایک نقطہ ب نقطہ (اے) سے شروع ہو کر یکساں رفتار سے ایک ثانیم میں محیط کا چکر لگاتا ہے، ذیل کی صورتوں میں اضافہ کی شرح دریافت کرو (۱) قوس اے ب (۲) وتر اے ب (۳) قطاعی رقبہ اے ب ج (۴) مثلثی رقبہ اے ب ج (۵) چیمبر اے ب ج میں جبکہ زاویہ اے ب ج 60° ہے۔

- ۱۱۔ اگر ایک گرام پانی کا حجم ایسے بدلتا ہو جیسے $1 + \frac{(t-2)^2}{144}$ جہاں t مئی پیش ہے تو جی پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جبکہ $t = 20$ اور $t = 40$ ۔

امثلہ ۶

(احال ضرب اور خارج قسمت)

ذیل کے تقرقات کی تصدیق کرو۔

- | | | |
|----|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| ۱۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |
| ۲۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |
| ۳۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |
| ۴۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |
| ۵۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |
| ۶۔ | $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ | عف $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ |

$$۷ - م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$۸ - م = م + \frac{n}{n-1}$$

$$۹ - م = م + \frac{n}{n-1}$$

$$۱۰ - م = م + \frac{n+1}{n-1}$$

$$۱۱ - م = م + \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

$$۱۲ - م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$۱۳ - م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$۱۴ - م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$۱۵ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۱۶ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۱۷ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۱۸ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۱۹ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۲۰ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$۲۱ - م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$عف م = م + \frac{1}{n-1}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n-1}$$

$$عف م = م + \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

$$عف م = م + \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

$$عف م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$عف م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$عف م = م + (۱ + \frac{1}{n})^2$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$عف م = م + \frac{1}{n}$$

$$۲۲ - م = \frac{۱ - جم لا}{جم لا + ۱}$$

$$عف م = \frac{۲ جب لا}{جم لا + ۱}$$

اشد

(تفاعلوں کے تفاعل)

$$۱ - م = (لا + ۱) (لا + ۱) \text{ تر عف م} = (لا + ۱) (لا + ۱) (لا + ۱) (لا + ۱) (لا + ۱) (لا + ۱)$$

$$۲ - م = \frac{لا}{(لا + ۱)}$$

$$عف م = \frac{۱ - ن لا}{۱ + (لا + ۱)}$$

$$۳ - م = \sqrt{لا + ۱}$$

$$عف م = \frac{۱}{\sqrt{لا + ۱}}$$

$$۴ - م = \sqrt{(۲ + لا)(۱ + لا)}$$

$$عف م = \frac{۳ + لا^۲}{\sqrt{(۲ + لا)(۱ + لا)}}$$

$$۵ - م = \sqrt{لا - ۱} (لا + ۱)$$

$$عف م = \frac{لا^۳ - ۱}{\sqrt{لا - ۱}}$$

$$۶ - م = (لا - ۱) \sqrt{لا + ۱}$$

$$عف م = \frac{(لا^۲ + لا - ۱)}{\sqrt{لا + ۱}}$$

$$۷ - م = \frac{۱}{\sqrt{لا - ۱}}$$

$$عف م = \frac{لا - ۱}{\sqrt{لا - ۱}}$$

$$۸ - م = \frac{لا}{\sqrt{لا + ۱}}$$

$$عف م = \frac{۱}{\sqrt{لا + ۱}}$$

$$۹ - م = \frac{\sqrt{لا + ۱}}{لا}$$

$$عف م = \frac{۱}{\sqrt{لا + ۱}}$$

$$۱۰ - م = \frac{\sqrt{لا + ۱}}{\sqrt{لا - ۱}}$$

$$عف م = \frac{۱}{\sqrt{لا - ۱}}$$

$$۱۱- م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$۱۲- م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$۱۳- م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$۱۴- م = \text{جب } ۲ (۱-۱) \text{ عم}$$

$$۱۵- م = \text{جب } ۲$$

$$۱۶- م = \sqrt{۱+۱+۱+۱}$$

$$۱۷- م = \text{سر } ۱$$

$$۱۸- م = \text{قط } ۱$$

$$۱۹- م = \text{سر } ۲$$

۶۹

$$\text{عف } م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$\text{عف } م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$\text{عف } م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$\text{عف } م = \text{جم } ۲ (۱-۱) \text{ عم}$$

$$\text{عف } م = \text{جب } ۲$$

$$\text{عف } م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

$$\text{عف } م = \frac{\text{جب } ۲}{\text{جم } ۳}$$

$$\text{عف } م = \frac{\text{جب } ۲}{\text{جم } ۳}$$

$$\text{عف } م = \frac{\text{جب } ۲}{\text{جم } ۳}$$

$$۲۰- م = \text{جب } ۲ (۱-۱) \text{ عم} \quad \text{عف } م = \text{جم } ۲ (۱-۱) \text{ عم}$$

$$۲۱- م = \text{جب } ۲ (۱-۱) \text{ عم} \quad \text{عف } م = \text{جم } ۲ (۱-۱) \text{ عم}$$

$$۲۲- م = \text{سر } ۱ + \text{سر } ۲ \quad \text{عف } م = \text{قط } ۱$$

$$۲۳- م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}} \quad \text{عف } م = \frac{\text{جب } ۲}{\text{جم } ۳} (۱-۱) \text{ عم}$$

$$۲۴- م = \text{جب } ۲ (۱-۱) \text{ عم} \quad \text{عف } م = \text{جم } ۲ (۱-۱) \text{ عم}$$

$$۲۵- م = \sqrt{\text{ع } \text{جب } ۲ (۱-۱) \text{ عم}} \quad \text{عف } م = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۱+۱}}$$

امثلة
مقرب تفاعل

- ۱- ما = جبة (۱- لا) عفا = $\frac{1}{\frac{1}{1-لا}}$
- ۲- ما = لاجبة لا عفا = $\frac{لا}{\frac{لا}{1-لا}}$
- ۳- ما = مم لا عفا = $\frac{1}{1+لا}$
- ۴- ما = قبة لا عفا = $\frac{1}{\frac{لا}{1-لا}}$
- ۵- ما = تم لا عفا = $\frac{1}{\frac{لا}{1-لا}}$
- ۶- ما = جبة لا + جبة لا عفا = .
- ۷- ما = سن لا + سن لا عفا = .
- ۸- ما = جبة { لا لا ۱- لا ۲ } عفا = $\frac{۲}{\frac{۲}{1-لا}}$
- ۹- ما = سن لا عفا = $\frac{لا}{\frac{لا}{1-لا}}$
- ۱۰- ما = جتم لا عفا = $\frac{لا-۱}{1+لا}$
- ۱۱- ما = سن لا عفا = $\frac{سن عفا}{1+قطاع عفا}$

۹۔ اگر گیس کے حجم اور دباؤ میں رشتہ $d \propto \frac{1}{V}$ = مستقل ہو تو کمپی ایک گہ d کے مساوی ہے۔

مشلہ ۱۰

(۴۱)

(جزوی تفسیر)
۱۔ سطح W = $(W + W')$ کے نقشی خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔
۲۔ نیز سطح W = $(W + W')$ کے نقشی (Contour) خط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو۔
۳۔ اگر $W = F(W + W')$
تو ثابت کرو کہ $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$ اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۴۔ اگر $W = F(W + W')$
تو ثابت کرو کہ $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$ اور $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$

۵۔ اگر $W = F(W + W')$
 $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$

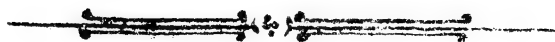
تو ثابت کرو کہ $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$ اور $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$
۶۔ اگر $W = F(W + W')$

تو ثابت کرو کہ $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$ اور $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$

۷۔ اگر $W = F(W + W')$
 $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')} + \frac{W}{F(W + W')} = \frac{W}{F(W + W')}$

ا- اگر اولاً ۲ هـ لا ما ب ما گ لا ۲ ف ما ج =
 ثوابت کرد که $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا + هـ + ما + گ}}{\text{هـ لا + ب ما + ف}}$



تیسرا باب

قوت نما تفاعل اور لوکار تہی تفاعل

۳۶۔ قوت نما تفاعل :- تفاعل زیر بحث کی تعریف کئی طرح کیجا جاسکتی ہے لیکن علم احصا اور اس کے اکثر اطلاقات کے مد نظر ذیل کی تعریف زیادہ موزوں ہوگی۔ اس تفاعل کی اساسی خاصیت ہے کہ یہ

فرما = $\frac{1}{2} \text{ گ م}$ (۱)

کے نمونہ کی مساوات کو پورا کرتا ہے جہاں گ کی مثبت یا منفی مستقل ہے۔ اسے الفاظ میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ کسی آن میں تفاعل کے اضافہ کی شرح کو تفاعل کی اسی آن کی نسبت کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے مذکورہ بالا تعریف والے عام قوت نما تفاعل کے مقابلہ میں تفاعل

ما = $\frac{1}{2} \text{ ب لا}$ (۲)

کے ساتھ کیا جاسکتا ہے۔ اس کو خطی تفاعل کہنے کی وجہ یہ ہے کہ اس کی ترکیب ایک سیدھا خط ہے۔ درحقیقت ان دونوں میں وہی رشتہ ہے جو سود مرکب کو سود مفرد کے ساتھ ہے بشرطیکہ سود مرکب مستقل وقفوں کے بعد جمع ہونے کی بجائے مسلسل جمع ہوتا رہے۔

۱۔ بعد میں معلوم ہوگا کہ اگر لا نامعلوم مقدار ہے تو یہ لازماً ج کی شکل کا ہوگا اور اصطلاح ”قوت نما“ تفاعل کی وجہ سے یہ ہے کہ اس میں متغیر لا بطور قوت نما کے شریک ہوتا ہے۔

تمام خطی تفاعل میں دو مستقل ہیں یعنی $\frac{1}{\text{م}}$ اور ابتدائی قیمت ۱۔
اگر یہ بیان پہلے ہی سے کافی طور پر واضح نہ ہوتا تو ہم غالباً معیاری خطی تفاعل
اسے لیتے جنکا $\frac{1}{\text{م}}$ اور ابتدائی قیمت دونوں ایک کے مساوی ہوں یعنی

$$\frac{1}{\text{م}} = 1 \quad (۳۱)$$

اب اس میں $\frac{1}{\text{م}}$ اور $\frac{1}{\text{م}}$ کے مہمانوں کو مناسب طور پر بدلنے سے عام خطی تفاعل
مائل ہو جاتا ہے۔

اسی طرح عام قوت نامہ تفاعل میں بھی دو مستقل شریک ہیں یعنی مساوات
(۱) کا مستقل $\frac{1}{\text{م}}$ اور ابتدائی قیمت جو فرض کرو کہ ج ہے۔

ابھی ثابت کیا جائیگا کہ دو مستقل تفاعل کو پورے طور پر معین کر دیتے ہیں۔
ہم اس تفاعل کو معیاری تفاعل کہیں گے جس میں $\frac{1}{\text{م}} = 1$ اور جس کی ابتدا
قیمت بھی ایک ہے۔

دوسرے لفظوں میں ہم قوت نامہ تفاعل کی تعریف مساوات

$$\frac{1}{\text{م}} = 1 \quad (۳۲)$$

کے اس عمل سے کریں گے جس کی قیمت ایک ہے جبکہ $\frac{1}{\text{م}} = 1$ ۔

۳۳۔ سلسلہ قوت نامہ۔ سب سے پہلے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ایسے

تفاعل کا وجود ہے اور پھر اگر ممکن ہو تو کوئی ایسا ضابطہ دریافت کرنا ہے جس سے
لا کی کسی مقرر قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کسی مطلوبہ تقریبی تمام تک نکالی جاسکے۔
بطور آزمائش کے فرض کرو کہ مساوات

$$\frac{1}{\text{م}} = 1 \quad (۱)$$

کامل ذیل کے قوتی سلسلہ کا حاصل جمع ہے

$$\frac{1}{\text{م}} = 1 + \frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{م}^2} + \dots + \frac{1}{\text{م}^n} \quad (۲)$$

اب فرض کرو کہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^0 \right] \frac{1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

کلم ہے جو خود بخود ہے۔ اس لئے

$$\text{نیا} = \{ \text{م}(\text{ع}), -\text{م}(\text{ع}) \} \dots \dots \dots (12)$$

اس لئے تفاعل م (لا) متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ اس طرح
ثبات کیا جاسکتا ہے کہ ج (لا) بھی مسلسل ہے۔ اب نتیجہ (۹) سے ق (لا)
کا مسلسل ثابت ہوتا ہے نیز (۱۰) سے

$$\dots + \frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{n-1}^2 + r_n^2}{r_1} + \frac{r_1 + r_2}{r_2} = \frac{(r_1)^2 - (r_n)^2}{r_1 - r_n}$$

بائیں جانب کی قمیں ایک علامت کی ہیں خواہ لا اور لا مثبت ہوں یا منفی۔ اس لئے مساوات (۱۳) میں خری رقم کے شمار کنندہ کی قیمت ۲ لا^{۱۰۲} اور ۲ لا^{۱۰۲} کے درمیان ہوگی اور اس لئے سلسلہ کا حاصل جمع ج (لا) اور ج (لا) کے درمیان ہوگا۔ چونکہ ج (لا) مسلسل تفاعل ہے اس لئے

$$\frac{2^{(n)} - 2^{(n-1)}}{n - (n-1)} = 2^{(n-1)} \dots \dots \dots (14)$$

یعنی م (۱۵) = ج (۱۵) (۱۵)
اور اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

..... (۱۶) = (۱۷) (۱۸)..... (۱۹)

پس ق (۷) = $\frac{۷}{۷} \{ ۴(۷) + ۳(۷) \}$

$$m'(\lambda) + j'(\lambda) =$$

$$= \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اس لئے رشتہ ماہی (لا) لاکھ کی تمام قیمتوں کے لئے مساوات (لا) کر
یہ دیکھتا ہے۔

نیز ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات (۱۱) کا حل جو شرط $ما = ا' لا = ۰$ کے
تابع حاصل ہوتا ہے یگانہ حل ہے۔ کیونکہ اگر $ع$ اور $و$ دو ایسے حل ہوں
تو $\frac{فر}{لا} = ۶ = ا$ اور $\frac{فر}{لا} = ۰ = و$ (۱۸)
یعنی $و$ $\frac{فر}{لا} - ۶ = \frac{فر}{لا}$ (۱۹)
یا $\frac{فر}{لا} = (۰) = ۰$ (۲۰)
اس لئے ثابت ہوا کہ $\frac{فر}{ع}$ کی نسبت مستقل ہے۔ اور اگر $ع = ا' و = ۰$
جبکہ $لا = ۰$ تو اس مستقل کا ایک ہونا ضروری ہے پس $۶ = و$
۳۸۔ مسئلہ جمع اور ق (لا) کی ترسیم۔

۷۶

عام تر مساوات $\frac{فر}{ما} = ک$ (۱)
ذیل کی صورت میں لکھی جاسکتی ہے
 $\frac{فر}{ک لا} = ما$ (۲)
اور اسلئے اس کا حل شرط $ما = ا' لا = ۰$ کے ماتحت $ما = ق (ک لا) \dots (۳)$ ہوگا۔
اب فرض کرو کہ
 $۶ = ق (لا) \times ق (ب لا) \dots (۴)$
تو $\frac{فر}{لا} = ا ق (لا) \times ق (ب لا) + ب ق (ب لا) \times ق (لا)$

* اس میں ہم نے ایک بالکل ظاہر مسئلہ کو مان لیا ہے جس کا باضابطہ ثبوت
صفحہ ۵۶ میں دیا جائیگا۔

$$(۵) \dots = (۱+ب) ق (۱+لا) ق (ب+لا) = (۱+ب) ق (۱+لا) \dots$$

نیز عدد کی ابتداء کی قیمت ایک ہے۔ پس

$$(۶) \dots = ق \{ (۱+ب) لا \} \dots$$

یعنی ۱ اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

$$(۷) \dots = ق (۱) \times ق (ب) = ق (۱+ب) \dots$$

یہ قوت ناتفاعلوں کا مسئلہ جمع کہلاتا ہے۔

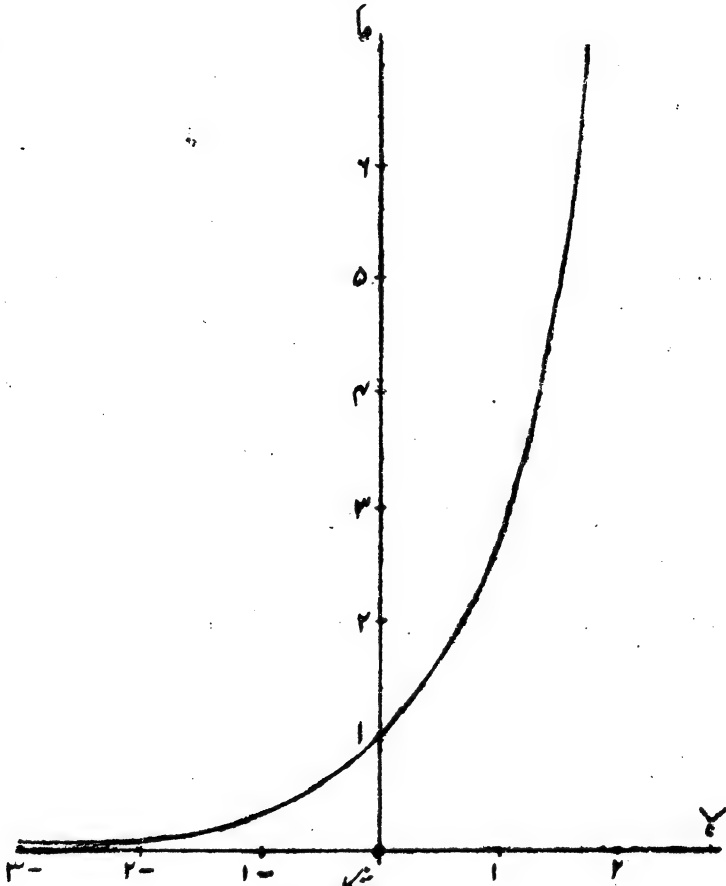
$$(۸) \dots = ق (لا) \times ق (لا) = ق (۰) = ۱ \dots$$

$$(۹) \dots = ق (لا) = \frac{۱}{ق (لا)}$$

ہم نے پہلے ثابت کیا ہے کہ تفاعل ق (لا) سلسل ہے۔ نیز لا کی مثبت قیمتوں کے لئے ق (لا) کے سلسلہ کی ہر ایک رقم لا کے ساتھ بڑھتی ہے اور لا سے ∞ کے لئے لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے۔ اس لئے حاصل جمع کے لئے بھی یہ بات ضروری طور پر صحیح ہے۔

علاوہ اس کے (۹) سے ظاہر ہے کہ اگر لا مثبت ہو تو ق (لا) بھی مثبت ہوتا ہے اور مطلق قیمت میں کم ہوتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور لا سے ∞ کے لئے صفر ہو جاتا ہے۔ اس لئے جیسے لا کی قیمت ∞ سے ∞ تک بڑھتی ہے تفاعل ق (لا) سلسل طور پر صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے اور ہر ایک درمیانی قیمت صرف ایک ہی مرتبہ اختیار کرتا ہے۔

صفحہ ۱۰ کی شکل نمبر ۱۰ ق (لا) کی ترسیم ہے۔ اور تفاعل ق (لا) کی عددی قیمتوں کا تختہ کتاب کے قلم برجدول (ع) میں دیا گیا ہے۔



شکل ۲۲

۳۹- عدد قو -

دفعہ ۳۸ کے نتیجہ (۷) کی توسیع حسب ذیل کیا جاسکتی ہے:-

$$ق (۱) \times ق (ب) \times ق (ج) = ق (۱+ب) \times ق (ج) = ق (۱+ب+ج) \dots (۱)$$

اور اسی طرح اجزاء ضربی کی کسی تعداد کے لئے -

اگر ہم ن اجزاء کو جنہیں سے ہر ایک ق (۱) کے مساوی ہے آپ میں ضرب

دیں تو

$$\{ق(۱)\} = ق(۱+۱+.....ن رقوم تک) = ق(ن).....(۲)$$

مقدار ق (۱) یعنی سلسلہ

$$(۳)..... + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$$

کو ہم علامت "قو" سے تعبیر کریں گے 'اعشاریہ کے سات مقام تک اپنی قیمت

اس ترقیم میں اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$ق(ن) = قو.....(۴)$$

نیز اگر $\frac{۱}{۲}$ مفرد ترین رقوم میں کوئی حسابی منطوق کسر ہو تو

$$\{ق(\frac{۱}{۲})\} = ق(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} +ن رقوم تک) = ق(۲) = قو$$

$$(۵)..... ق(\frac{۱}{۳}) = قو$$

پس اگر لا کوئی مثبت منطوق مقدار ہو صحیح عدد یا کسر تو

$$ق(لا) = قو.....(۶)$$

اب دفعہ ۳۸ (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ق(-لا) = ق(\frac{1}{لا}) = \frac{1}{قو} = قو^{-۱}$$

یعنی نتیجہ (۶) لا کی تمام منطوق قیمتوں کے لئے صحیح ہے خواہ یہ مثبت ہوں یا منفی۔ یہ قابل توجہ ہے کہ لا کے غیر منطوق ہونے کی صورت میں علامت

قولا کی (ہنوز) تعریف نہیں کی گئی۔ اب ہم اس کی تعریف یوں کر کرسکتے ہیں کہ

یہ ق (۹) کے سلسلے کے حاصل جمع کو تعمیر کر کے لے ایک اور علامت ہے۔ اس تعریف کا نامہ
 ہے کہ اس طریق کتابت سے ان جبریت قوانین کی یاد دہانی ہوتی ہے جنکو یہ تعریف پورا کرتا ہے۔
 پس $ق \times ق = ق \times (ق \times م) = ق (ق \times م) = ق \times (ق \times م) = ق \times (ق \times م) = ق \times (ق \times م)$

جہاں ۹ اور ۹ م منطق یا غیر منطق ہو سکتے ہیں۔

قو کی قیمت نکالنے کا عمل بالکل آسان ہے سلسلہ (۳) کی پہلی (۱۳) رقمیں یہ ہیں۔

$$2 = 1 + 1 \quad 5 \dots 198413 = \frac{1}{12}$$

$$5 \dots 24802 = \frac{1}{81} \quad 55 = \frac{1}{2}$$

$$5 \dots 2456 = \frac{1}{9} \quad 5166666666 = \frac{1}{3}$$

$$5 \dots 246 = \frac{1}{10} \quad 5016666666 = \frac{1}{27}$$

$$5 \dots 25 = \frac{1}{11} \quad 5008333333 = \frac{1}{5}$$

$$5 \dots 2 = \frac{1}{12} \quad 5001388889 = \frac{1}{6}$$

ان ہندسوں کا حاصل جمع ۲۵۷۱۸۲۸۱۸۳۰ ہے؛ باقی رقموں کو نظر انداز کر دینے سے جو غلطی

یا خطا پیدا ہوتی ہے وہ سلسلہ $\frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots$ کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

یہ سلسلہ کم ہے $\frac{1}{12} [1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \dots]$ یعنی $\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}$ سے اور اس لئے

اسکا اعشاریہ کے نویں مقام پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔ پس اوپر کی جدول میں آخری ہندسوں کی
 خطاؤں کے لئے انجائش چھوڑتے ہوئے ہم اطمینان سے کہہ سکتے ہیں کہ اوپر کے
 نتیجہ سے اعشاریہ کے سات مقام تک قو کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے۔
 ۴۰۔ زائدی تقاضا ہے۔ قوت ماتفاعل کے چند ایسے مرکب ہیں کہ

جن کے خواص علم مثلث کے عام تفاعلوں کے خواص کے ساتھ باقاعدہ مشابہت رکھتے ہیں، ان تفاعلوں کو ہم زائدی جیب، جیب التمام، ماس وغیرہ کہیں گے۔ انکی تعریفیں ذیل میں دی جاتی ہیں۔

$$\text{جہز لا} = \frac{1}{4} (\text{قو}^2 - \text{قو}') = \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{4} + \frac{\text{لا}^2}{4} + \dots$$

$$\text{جہز لا} = \frac{1}{4} (\text{قو}^2 + \text{قو}') = 1 + \frac{\text{لا}^2}{4} + \frac{\text{لا}^2}{4} + \dots$$

$$\text{مسلا لا} = \frac{\text{جہز لا}}{\text{جہز لا}} \quad \text{قطنر لا} = \frac{1}{\text{جہز لا}}$$

$$\text{من لا} = \frac{\text{جہز لا}}{\text{جہز لا}} \quad \text{قمن لا} = \frac{1}{\text{جہز لا}}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جہز لا تفاعل ہم لا کی طرح 'جفت تفاعل' ہے یعنی لا کی بجائے لا کہتے ہیں اسکی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اور برعکس اس کے جہز لا تفاعل جب لا کی طرح طاق تفاعل ہے یعنی لا کی بجائے لا کہتے ہیں تفاعل کی مطلق قیمت وہی رہتی ہے لیکن علامت بدل جاتی ہے۔

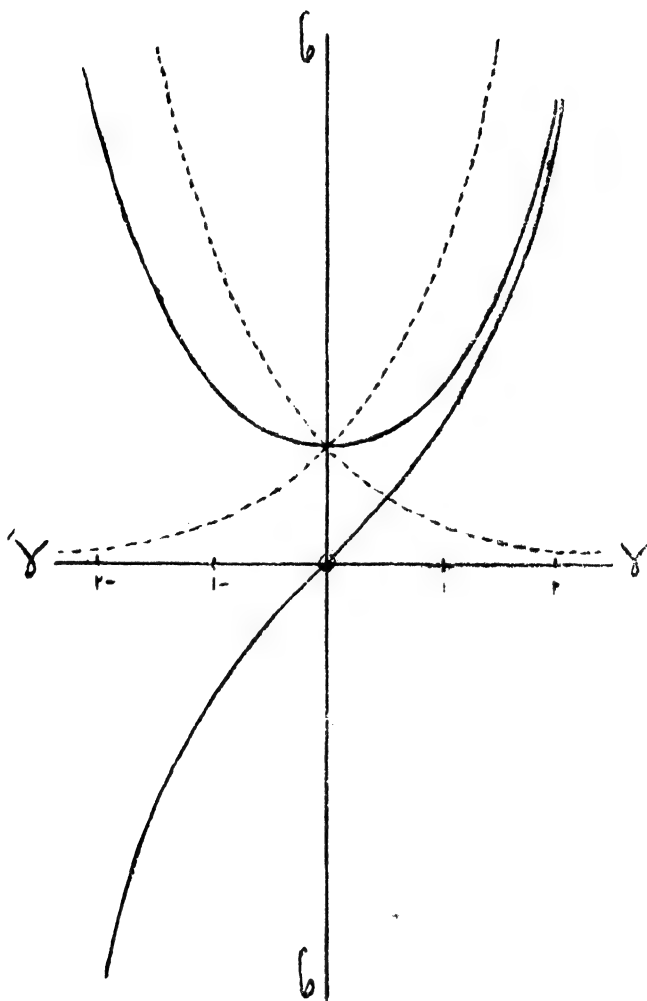
شکل ۱۰ میں منحنی ما = قو اور ما = قو' نقطوں والے خطوط سے دکھائے گئے ہیں۔

ہیں اور منحنی ما = جہز لا اور ما = جہز لا جو اوپر کے منحنیوں کے معینوں کے بالتسب نصف مجہز اور نصف فرق لینے سے حاصل ہوتے ہیں مسلسل خط میں دکھائے گئے ہیں۔

* چند باتوں میں ان تفاعلوں کو قائم زاد کے ساتھ وہی رشتہ بہت جو مستند تفاعلوں کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰۰ مثال ۲۔

* یہ تفاعل ذرا مختلف طریق کا مستند دفعہ ۳ میں نمودار ہو چکے ہیں۔

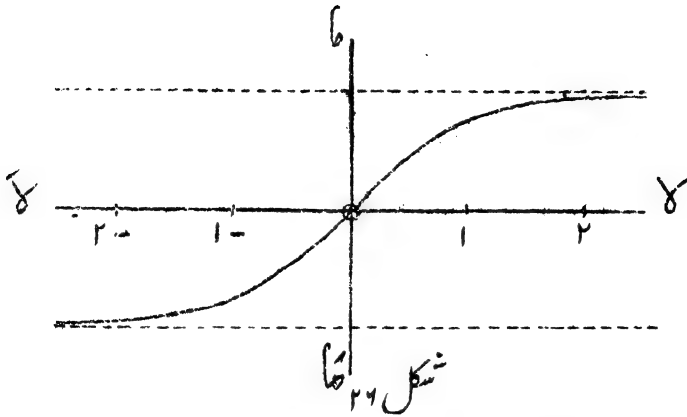
* منحنی ما = جہز لا کو کم سکونیات میں زخمیہ کے موسوم کیا جاتا ہے۔ یہ کہ کچھ اشاعت والی زخمیہ جو قوت جاذبہ کے زیر عمل آزادانہ لگ رہی ہو یہ شکل اختیار کرتی ہے۔



شکل ۲۵

چونکہ تفاعل جنس لا اور جنس لا مسلسل میں اور جنس لا کبھی صف نہیں ہوتا
اس لئے ثابت ہوا کہ مسٹر لا تغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے
شکل ۲۶ میں منحنی $MA = MS$ لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے خطوط $MA = \pm 1$ کے

تقارب ہیں۔*



چونکہ جنم لا + جنم لا = قو اور جنم لا - جنم لا = قو (۳)
اس لئے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

جنم لا - جنم لا = ۱ (۴)
نیز اسکو بالترتیب جنم لا اور جنم لا سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$(۵) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{قطن}^2 \text{ لا} = ۱ - \text{مسن}^2 \text{ لا} \\ \text{قمن}^2 \text{ لا} = \text{ممن}^2 \text{ لا} - ۱ \end{array} \right.$$

نیز جنم لا + ما = ۱ (۶)

$$\frac{1}{4} = \{ (جنم لا + جنم لا) (جنم ما + جنم ما) (جنم لا + جنم لا) (جنم ما + جنم ما) \}$$

..... (۶)

۹ تفاعل جنم لا جنم لا اور مسن لا کی قیمتیں اشاریہ کے تین مقام تک لا کی قیمتوں سفر سے
۵ و ۲ تک کے لئے وقتوں ۱، ۲، ۳ پر تخمینہ کے جدول ع میں دی ہوئی ہیں۔

اور اسی طرح

۶۲

جبنہ (لا + ما) = جبنہ لا جبنہ ما + جبنہ لا جبنہ ما (۷)
اور بالخصوص جبنہ (لا + جبنہ لا) = جبنہ لا جبنہ لا = ۲ جبنہ لا جبنہ لا (۸)
نتیجہ (۴) اور (۵) ذیل کے غلطی نتائج کے مقابلہ میں ہیں

جبا لا + جبا لا = ۱ (۹)

قطا لا = ۱ + س لا (۱۰)

قما لا = ۱ + م لا (۱۱)

اور اسی طرح نتیجہ (۸) ذیل کے نتیجوں کے مشابہ ہے

جہم ۲ لا = جہم لا جبا لا جبا ۲ لا = ۲ جبا لا جہم لا (۱۱)

۴۱۔ زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

(۱) اگر ما = جبنہ لا (۱)

$$\text{تو فرما} = \text{عف} \left(\frac{\text{قو} - \text{قو}}{۲} \right) = \frac{۱}{۲} (\text{عف قو} - \text{عف قو})$$

(۲) (۲)

اسی طرح اگر ما = جبنہ لا (۳)

تو فرما = جبنہ لا (۴)

(۲) اگر ما = مسنہ لا (۵)

$$\text{تو فرما} = \text{عف} \left(\frac{\text{جبنہ لا}}{\text{جبنہ لا}} \right) = \frac{\text{جبنہ لا} \times \text{عف جبنہ لا} - \text{جبنہ لا} \times \text{عف جبنہ لا}}{\text{جبنہ لا}}$$

$$\text{جبنہ لا} = \frac{\text{جبنہ لا} - \text{جبنہ لا}}{\text{جبنہ لا}} = \text{قطر لا} \dots \dots (۶)$$

دفعہ ۳۰ (۴) کی مدد سے۔

اسی طرح اگر ما = ممز لا (۷)

- تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \text{قمنز لا}$ (۸)
- (۳۱) اگر $\text{ما} = \text{قطنز لا}$ (۹)
- تو دفعہ ۳۱ (۴) کی مدد سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{عف} \left(\frac{1}{\text{جمنز لا}} \right) = - \frac{\text{عف جمنز لا}}{\text{جمنز لا}} \text{ (۱۰)}$$

- اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{قمنز لا}$ (۱۱)

$$\text{تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{جمنز لا}}{\text{جمنز لا}} \text{ (۱۲)}$$

۴۲۔ لوکارنتی تفاعل۔

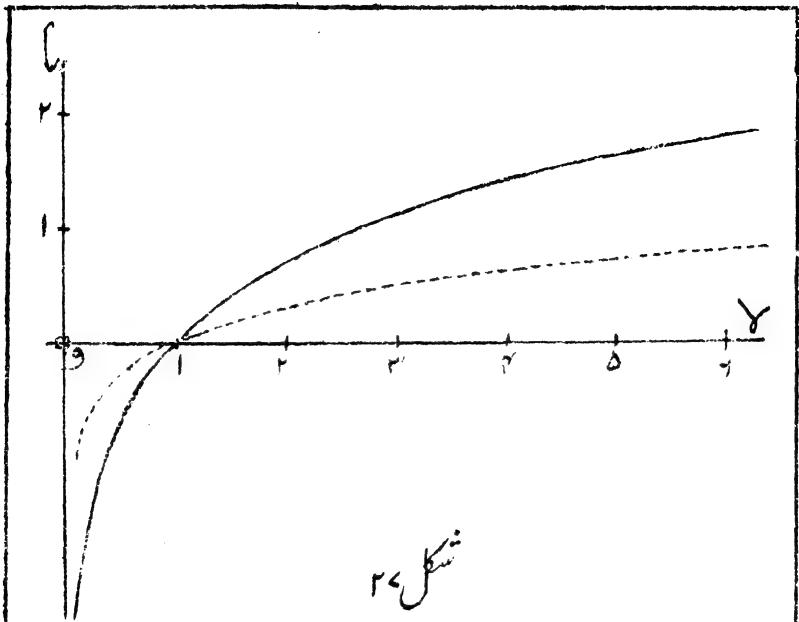
قوت ما تفاعل کے مقلوب تفاعل کو لوکارنتی تفاعل کہتے ہیں۔

$$\text{اب اگر لا} = \text{فوا} \text{ تو } \text{ما} = \text{لوگ لا} \text{ (۱)}$$

دفعہ ۳۸ میں ہم نے دیکھا تھا کہ جیسے $\text{ما} = \infty$ سے صفر میں سے ہوتا ہوا $\infty + \infty$ تک بڑھتا ہے تو فوا بھی مسلسل طور پر صفر سے ایک میں سے ہوتا ہوا $\infty + \infty$ تک بڑھتا ہے۔ پس لا کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے لوگ لا کی صرف ایک ہی قیمت ہے، نیز یہ قیمت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اسکے کہ $\text{لا} < \text{یا} > 1$ ۔ نیز جبکہ $\text{لا} = 1$ تو $\text{ما} = \infty$ اور $\text{لا} = \infty + \infty$ کے لئے $\text{ما} = \infty + \infty$ کی منفی قیمتوں کے لئے لوکارنتی تفاعل وجود نہیں رکھتا۔

لوکارنتی تفاعل کے عام خواص اس تعریف سے حسب معمول طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ شکل ۲ میں مسلسل خط سے لوگ لا کی پریم دکھائی گئی ہے ظاہر ہے کہ یہ پریم اصل میں وہی ہے جو فوا کی ہے (دیکھو شکل ۲ ص ۱۱۰) صرف لا اور ما آپس میں بدل دئے گئے ہیں۔

* تفاعل لوگ لا کی قیمتیں نمبر کی جدول ف میں دی گئی ہیں۔



اس کتاب میں علامت لوگ لا ہمیشہ لوگ لا کو تعبیر کرے گی۔

۲۳۔ چند انتہائی قیمتیں۔

قوت نما اور لوکارتمی تفاضلوں سے متعلق چند انتہائی قیمتیں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔

(۱) نیا لا قوت لا ∞ (۱)

کو محسوب کرو۔
یہ تفاضل غیر یمنین شکل $\times \infty$ اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ

$$\frac{1}{\text{قوت لا}} = \frac{1}{\text{لا}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

اس لئے ظاہر ہے کہ دریافت طلب انتہا صفر ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ∞ کی تمام ناطق قیمتوں کے لئے

(۲) $\infty \leftarrow \infty = \infty$

اس سے حاصل ہوا کہ جیسے ∞ ، ∞ انتہا بڑھتا ہے تو بمقابلہ ∞ کی بڑی سے
بڑی قوت کے ∞ انتہا ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ∞ ایک سے کم نسبت مقدار ہو تو

(۳) $\infty \leftarrow \infty = \infty$

اس کے ثبوت کے لئے فرض کر دو کہ
گ = لوگ $\left(\frac{1}{\infty}\right)$

اب چونکہ کی مثبت ہے
 $\infty \leftarrow \infty = \infty$ فوجی

(۲) اب اگر نتیجہ (۱) میں ہم رکھیں ∞ یعنی $\infty =$ لوگ ∞ تو حاصل ہوتا

(۴) $\infty \leftarrow \infty = \infty$

پس جیسے ∞ بے انتہا بڑھتا ہے ویسے لوگ ∞ بھی ∞ انتہا بڑھتا ہے لیکن
 ∞ کے مقابل میں ∞ انتہا چھوٹا رہتا ہے۔

(۳) نیز اگر نتیجہ (۱) میں ∞ یعنی $\infty =$ لوگ ∞ تو حاصل ہوتا ہے۔

(۵) $\infty \leftarrow \infty = \infty$

(۳) اب $\infty \leftarrow \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

$= 1 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) + \frac{1}{2 \times 3} + \dots$

خلوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ ستدق ہے اور اسلئے اس کا حامل جمع محدود ہے۔

پس $\text{نہا} = \frac{1 - 1}{1} = 1$ (۶)

اور اگر لا کی بجائے گ لکھیں تو

نہا $\text{فگ} = \frac{1 - 1}{1} = 1$ (۷)

اور اس میں گ = لوگ ر دج کرنے سے جہاں ر مثبت مقدار ہے
حاصل ہوتا ہے

نہا $\text{لا} = \frac{1 - 1}{1} = 1$ (۸)

نیز لا = ۱/۲ دج کرنے سے اس نتیجہ کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے

نہا $\text{ن} = (1 - \frac{1}{2}) = 1$ (۹)

(۵) اگر (۶) میں لا = لوگ (۱+۱) یعنی $\text{فگ} = 1 + 1$ لکھیں تو حاصل ہوتا ہے

نہا $\text{فی} = \frac{\text{لوگ}(1+1)}{1} = 1$ (۱۰)

(۶) اگر $6 = (1 + \frac{1}{2})$ (۱۱)

تو لوگ ۶ = ن لوگ $(1 + \frac{1}{2})$

اور اس میں لا = ن فی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

نہا $\text{ن} = 6 = لا \times \text{نہا} = \frac{\text{لوگ}(1+1)}{1}$ [نتیجہ (۱۰) کی مدد سے]

..... (۱۲)

پس نہا $\text{ن} = (1 + \frac{1}{2}) = 1$ (۱۳)

بعض اوقات جبر و مقابلہ میں دائیں جانب کی انتہا سے قوت کا تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔

۴۴۔ لوکارتم کا تفرق

(۱) اگر ما = لوک لا (۱)

$$\text{تو لا} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{فر ما} = \text{لا}$$

اور اس لئے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{1}{\text{لا}}$ (۲)

اور چونکہ یہ گھٹتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اس لئے اس کے منہی کے ماس کا میلان محور لا سے کم ہوتا جاتا ہے۔ شکل ۲۷ صفحہ (۱۱۹) دیکھو۔

(۳) اگر ما = لوک لا (۳)

$$\text{تو لا} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{\text{لوک لا}}{\text{لوک لا}} = \text{لا}$$

اس لئے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{1}{\text{لوک لا}} \times \frac{1}{\text{لوک لا}}$ (۴)

مثلاً اگر ما = لوک لا (۵)

تو $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ (۶)

جہاں وفد ۴۲ کے مطابق ما = ۶۴۳۲۹۔

(۷) اگر ما = لوک لا (۷)

جہاں ح تغیر لا کا علو سے تفاعل ہے تو وفد ۳۲ کے مطابق

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{فر لا}} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$$

مثال ۱۔ اگر ما = لوک (جب لا) (۹)

تو فرما $\frac{1}{\text{فرلا}} = \text{جب لا} \times \text{عف (جب لا)} = \text{مم لا}$ (۱۰)

اسی طرح اگر ما = لوک قطا لا = لوک جم لا (۱۱)

تو فرما $\frac{1}{\text{فرلا}} = \text{سس لا}$ (۱۲)

مثال ۲ - اگر ما = لوک (سس $\frac{1}{4}$ لا) (۱۳)

تو فرما $\frac{1}{\text{فرلا}} = \text{سس لا} \times \text{عف (سس لا)} = \text{سس لا} \times \text{قط لا} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

(۱۴) $\frac{1}{\text{جب لا}} =$

اسی طرح اگر ما = لوک سس $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ (۱۵)

تو ہمیں مال ہوگا $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{جم لا}}$ (۱۶)

مثال ۳ - اگر ما = $\frac{1}{4}$ لوک $(\frac{1}{4} + 1)$

(۱۷) $\frac{1}{4} \text{ لوک } (1 + 1) - \frac{1}{4} \text{ لوک } (1 - 1) =$

تو فرما $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1}$ (۱۸)

مثال ۴ - فرض کر دو کہ ما = لوک $\{ \frac{1}{1 \pm 1} + 1 \}$ (۱۹)

تو فرما $\frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\{ \frac{1}{1 \pm 1} + 1 \}} \times \text{عف } \{ \frac{1}{1 \pm 1} + 1 \}$

$\{ \frac{1}{\frac{1}{1 \pm 1} + 1} + 1 \} \times \frac{1}{\frac{1}{1 \pm 1} + 1} =$

(۲۰) $\frac{1}{1 \pm 1} =$

۴۵۔ لوکاری تفرق
زیادہ اجزاء وضی داتے تفاعل کو تفرق کرنے سے پہلے تفاعل کا لوکاری تم
لے لینے سے اکثر دفعہ سہولت ہو جاتی ہے۔

پس اگر $\text{ما} = \text{ع} + \text{ع} + \text{ع} + \dots$ (۱)

تو لوک $\text{ما} = \text{لوک ع} + \text{لوک ع} + \text{لوک ع} + \dots$ لوک و۔ لوک و۔ لوک و۔ (۲)
اور اس لئے موجب دفعہ ۴۴ (۳)

$$\frac{\text{ما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ع}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ع}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ع}}{\text{فرلا}} + \dots + \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$(۳) \dots \frac{\text{ا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ا}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ا}}{\text{فرلا}} - \dots$$

دفعہ ۳ اور ۳۱ سے نتیجوں کی یہ عام شکل ہے

(۴) یہی طریقہ $\text{ما} = \text{ع} + \dots$
کے تفرق کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(۵) اب لوک $\text{ما} = \text{لوک ع} + \dots$

$$(۶) \dots \frac{\text{ا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \times \text{لوک ع} + \frac{\text{و}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$(۷) \dots \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}}{\text{فرلا}} \times \text{لوک ع} + \frac{\text{و}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

یعنی تفاعل عائدہ و کو باری باری مستقل مائیکر تفرق کریں اور نتیجوں کو جمع کر لیں۔

$$\text{مثال ۱۔ اگر } \text{ما} = \frac{(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} + \text{ب})}{(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ب})}$$

$$\text{تو لوک } \text{ما} = \frac{1}{4} \text{ لوک } (\text{ا} + \text{ب}) + \frac{1}{4} \text{ لوک } (\text{ب} + \text{ا}) - \frac{1}{4} \text{ لوک } (\text{ا} - \text{ب}) - \frac{1}{4} \text{ لوک } (\text{ب} - \text{ا})$$

پس $\frac{1}{\text{ما}} \frac{1}{\text{فر لا}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\text{لا} + \text{لا}} + \frac{1}{\text{ب} + \text{لا}} + \frac{1}{\text{لا} - \text{لا}} + \frac{1}{\text{ب} - \text{لا}} \right\}$

$$\frac{1}{\text{لا} - \text{لا}} + \frac{1}{\text{ب} - \text{لا}} = \frac{\text{ب}}{(\text{ب} - \text{لا})(\text{لا} - \text{لا})} + \frac{1}{(\text{لا} - \text{لا})(\text{ب} - \text{لا})} = \frac{(\text{ب} + 1)}{(\text{ب} - \text{لا})(\text{لا} - \text{لا})}$$

اسلئے فرما

$$\frac{1}{\text{فر لا}} = \frac{(\text{ب} + 1)}{(\text{ب} - \text{لا})(\text{لا} - \text{لا})} + \frac{1}{(\text{لا} - \text{لا})(\text{ب} + \text{لا})}$$

مثال ۲۔ اگر $\text{لا} = \text{ما}$ ✓

تو فرما $\text{لا} = \frac{1}{2} (\text{لا} + \text{لوک لا})$

۴۶۔ منقلب زائدی تفاعل - منقلب زائدی تفاعل
جنز لا، جنز لا، جنز لا، مسنن لا، وغیرہ وغیرہ کی تعریف اسی اصول پر کی جائیگی ۴۹
جو دفعہ ۱۶ میں بتایا گیا ہے۔

یعنی $\text{ما} = \text{جنز لا}$ کے معنی یہ ہیں کہ $\text{لا} = \text{جنز ما}$ (۱)
اور اسی طرح باقی منقلب تفاعلوں کے لئے۔
یہ تمام تفاعل لوکارخمی تفاعلوں کے رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

پس اگر $\text{لا} = \text{جنز ما} = \frac{1}{2} (\text{فو} - \text{فوا})$ (۲)

تو $\text{فوا} - 2 \text{لا} = \text{فو} - 1 = 0$ (۳)
فوا میں دوسرے درجے کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$\text{فو} = \text{لا} \pm \sqrt{1 + \text{لا}^2}$ (۴)

اگر ما حقیقی ہے تو فوا کو مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے اوپر کی علامت یعنی لازم

ہیں جنز لا = لوک $\{ \text{لا} + \sqrt{1 + \text{لا}^2} \}$ (۵)

اسی طرح اگر لا < اتوم حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جمن}^{\text{لا}} = \text{لوگ} \{ \text{لا} \pm \text{لا}^{\text{لا}} - 1 \} \dots \dots \dots (۶)$$

آئیں دونوں علامتیں ممکن ہیں۔ مقداریں لا ± لا^{لا} - 1 ایک دوسرے کی
منکافی ہیں اور انکا لوکارتم صرف علامت میں مختلف ہے۔ جمن^{لا} کی ترسیم
مکعبین پر ظاہر ہو گا کہ ایک سے بڑی لا کی خصوصیت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں
جو مقداریں مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں۔

$$\text{اب اگر } \text{لا} = \text{منر}^{\text{ما}} = \frac{\text{ق}^{\text{ما}} - \text{ق}^{\text{لا}}}{\text{ق}^{\text{ما}} + \text{ق}^{\text{لا}}} \dots \dots \dots (۷)$$

$$\text{تو } \text{ق}^{\text{لا}} = \frac{\text{ق}^{\text{لا}} + 1}{\text{ق}^{\text{لا}} - 1} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{پس } \text{منر}^{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ق}^{\text{لا}}} \text{ لوگ } \frac{\text{ق}^{\text{لا}} + 1}{\text{ق}^{\text{لا}} - 1} \dots \dots \dots (۹)$$

یہ حقیقی ہے صرف جبکہ $\text{ق}^{\text{لا}} > 1$ ہے۔

$$\text{اسی طرح } \text{منر}^{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ق}^{\text{لا}}} \text{ لوگ } \frac{1 + \text{ق}^{\text{لا}}}{1 - \text{ق}^{\text{لا}}}$$

اور حقیقی ہے صرف جبکہ $\text{ق}^{\text{لا}} < 1$ ہے۔

۴۔ مقلوب زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

$$(۱) \text{ اگر } \text{ما} = \text{جمن}^{\text{لا}} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{تو } \text{لا} = \text{جمن}^{\text{ما}} \text{ اور } \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ما}}} = \text{جمن}^{\text{ما}} = \text{لا}^{\text{لا}} + 1$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فر}^{\text{ما}}}{\text{فر}^{\text{لا}}} = \frac{1}{\text{لا}^{\text{لا}} + 1} \dots \dots \dots (۲)$$

۹۰۔ آئیں کوئی مثبت علامت نہیں ہے کیونکہ جمن^{ما} خاصیت سے مثبت ہے۔

(۲) اگر ما = جمنز' لا (۳)

$$\text{تو لا} = \text{جمنز ما اور فرما} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} = \text{جمنز ما} \pm \frac{1}{\text{لا} - 1}$$

پس فرما = $\frac{1}{\text{لا} - 1} \pm \frac{1}{\text{لا}}$ (۴)

ایک سے بڑی لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے لئے

فرما کی علامتیں مختلف ہیں (لا اور ما کو بدل کر صفحہ (۱۱۴) پر شکل ۲۵ دیکھو۔)

(۳) اگر ما = مسنز' لا (۵)

$$\text{تو لا} = \text{منز ما اور فرما} = \frac{\text{فرما}}{\text{لا}} = \text{قطنز ما} = 1 - \text{لا}$$

اور اس لئے فرما = $\frac{1}{1 - \text{لا}}$ (۶)

یہ نتیجہ دندہ ۴۴ مثال ۳ کے موافق ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ما صرف اسی وقت حقیقی ہے جبکہ لا > ۱ (شکل ۲۶ صفحہ (۱۱۵) پر دیکھو)

اسی طرح اگر ما = مهنز' لا (۷)

$$\text{تو فرما} = \frac{1}{\text{لا} - 1} \pm \frac{1}{\text{لا}}$$

اگر ما حقیقی ہو تو یہ ضروری ہے کہ لا' ایک سے بڑا ہو۔

اشکله ۱۱

۱۔ دو کے سلسلے کو جمع کر کے ثابت کر دو کہ

$$\frac{1}{\text{و}} = ۱۳۶۷۸۷۹، \text{جمنز} = ۱۵۵۴۳۰۸۰۶، \text{جمنز} = ۱۲۱۷۵۲۰۵۱$$

۲- ثابت کرو کہ $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۳- اگر $\frac{1}{10} > \frac{1}{10}$ اب ثابت کرو کہ مساوات $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ کی صرف ایک ہی اصل حقیقی ہے۔

۴- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ کی ترتیبیں کھینچو۔

۵- ثابت کرو کہ تفاعل منسٹر $\frac{1}{10}$ نقطہ $\frac{1}{10}$ پر غیر مسلسل ہے۔ نیز اس تفاعل کی ترتیبیں کھینچو۔

۶- اگر $\frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{10}$ مثبت ہوں اور $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ کی اوپر کی حد ہے اور نیچے کی حد ہے۔

ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

۷- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۸- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۹- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

اور جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۱۰- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۱۱- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

۱۲- $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ جب $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

$$13 - \text{مسئله} \frac{1}{2} = \frac{\text{جنم ۶}}{\text{جنم ۶} + 1} = \frac{\text{جنم ۶} - 1}{\text{جنم ۶}} = \frac{\text{جنم ۶} - 1}{\text{جنم ۶} + 1}$$

۱۲- جنبہ ۳ = ۶ جنبہ ۲ + ۶ جنبہ ۳

جمن ۳ = ۶ - ۲ جمن ۲ - ۳ جمن ۱

$$15 - 1 = 1 + 2 \text{ جمن} + 6 \text{ جمن} + 2 \text{ جمن} + 6 \text{ جمن} + \dots + 2 \text{ جمن} + 6 \text{ جمن} = \frac{\text{جمن}(1+6)}{\frac{1}{6}} = 6$$

۱۲ مثلہ

فیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱۱) $\bar{m} = m$ و $\bar{m} = m$ عرف ما = m و $m = m$

$$\frac{y}{x} = 6 \quad (2)$$

(۳) عفا = جہلا وجب لا

(۴) ما = قو جبالا

(۵) ما = ^{عبدال}عجب بیدار
عف ما = ^{عبدال}عجب بیدار (و ^{عبدال}عجب بیدار (و ^{عبدال}عجب بیدار)

عفا = (ع) جمید (لا) - (ب) جب (بلا) عفا

$$(4) \quad b = a \cdot r^0$$

(۸) ما = لا قولا

(9) $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ عفا = (a_1, a_2, \dots, a_n)

(۱۰) ما = وُجِبَ لا عفا = وُجِبَ (لا + جم لا)

$$(۱۱) \quad \text{ما} = \text{فوجم لا} \quad \text{عفا} = \text{فوجم لا - جب لا}$$

$$(۱۲) \quad \text{ما} = \frac{\text{فوجم لا}}{\text{فوجم لا} + ۱} \quad \text{عفا} = \frac{\text{فوجم لا}}{\text{فوجم لا} + ۲}$$

$$(۱۳) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا}$$

$$(۱۴) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا}$$

$$(۱۵) \quad \text{ما} = \text{مسنم لا} \quad \text{عفا} = \frac{\text{جبم لا}}{\text{جبم لا} + ۲}$$

$$(۱۶) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} + \frac{۱}{۳} \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا}$$

$$(۱۷) \quad \text{ما} = \text{مسنم لا} - \frac{۱}{۳} \text{مسنم لا} \quad \text{عفا} = \text{قطنم لا}$$

$$(۱۸) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} + \text{جبم لا} + \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا}$$

$$(۱۹) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} + \text{جبم لا} + \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا}$$

$$(۲۰) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} - \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \frac{\text{جبم لا}}{\text{جبم لا} + ۲}$$

$$(۲۱) \quad \text{ما} = \text{مسنم لا} + \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا} + \text{جبم لا}$$

$$(۲۲) \quad \text{ما} = \text{جبم لا} + \text{جبم لا} \quad \text{عفا} = \text{جبم لا} + \text{جبم لا}$$

مثله ۱۳

۹۳

ذیل کے تفروقات کی تصدیق کرو۔

$$(۱) \quad \text{ما} = \text{لا لوک لا} \quad \text{عفا} = \text{لا لوک لا}$$

$$(۲) \quad \text{ما} = \text{لا لوک لا} \quad \text{عفا} = \text{لا لوک لا}$$

$$(۳) \quad \text{ما} = \text{لوک جب لا} \quad \text{عفا} = \text{لوک جب لا}$$

$$(۴) \quad \text{ما} = \text{لوک جم لا} \quad \text{عفا} = \text{لوک جم لا}$$

$$(۵) \quad \text{ما} = \text{لوک مس لا} \quad \text{عفا} = \text{لوک مس لا}$$

$$(۶) \quad \text{ما} = \text{لوک جیم لا} \quad \text{عفا} = \text{لوک جیم لا}$$

$$(۷) \quad \text{ما} = \text{لوک جیم لا} \quad \text{عفا} = \text{لوک جیم لا}$$

- (۸) $\text{ما} = \text{لوک مستر لا}$ عف $\text{ما} = \frac{2}{\text{قنر لا}}$
- (۹) $\text{ما} = \text{لوک لا}$ عف $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا}+1)}$
- (۱۰) $\text{ما} = \text{لوک لا} - 1$ عف $\text{ما} = \frac{2}{\text{لا} - 1}$
- (۱۱) $\text{ما} = \text{لوک لا}$ عف $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا}^2+1)}$
- (۱۲) $\text{ما} = \text{لوک لا} + 1$ عف $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}(\text{لا}-1)}$
- (۱۳) $\text{ما} = \text{لوک } \{ \text{لا} + 1 + \sqrt{\text{لا}^2 - 1} \}$ عف $\text{ما} = \frac{1}{1 - \sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$
- (۱۴) $\text{ما} = \text{لوک لا}$ عف $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{لا}^2}}$
- (۱۵) $\text{ما} = \text{لوک لا} - (1 - \text{لا})$ عف $\text{ما} = \frac{1 + \text{لا}^2}{3(1 - \text{لا})}$
- (۱۶) $\text{ما} = \text{لوک لا} + 1 + \text{لا}^2$ عف $\text{ما} = \frac{2(1 - \text{لا}^2)}{3\text{لا} + \text{لا}^2 + 1}$
- (۱۷) $\text{ما} = \frac{\sqrt{2\text{لا} + 1}}{2\text{لا} - 1}$ عف $\text{ما} = \frac{2}{3(2\text{لا} - 1)\sqrt{2\text{لا} + 1}}$
- (۱۸) $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{لا}^2 + 1} + \text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + 1} + \text{لا}^2}$ عف $\text{ما} = \frac{2 - \sqrt{\text{لا}^2 + 1}}{\{ \sqrt{\text{لا}^2 + 1} + \text{لا} \}^2}$
- (۱۹) $\text{ما} = \frac{\sqrt{\text{لا} + 1} + \sqrt{\text{لا} - 1}}{\sqrt{\text{لا} - 1} - \sqrt{\text{لا} + 1}}$ عف $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا}(\text{لا} - 1)}$

$$(21) \quad 6 = \text{لوک} \frac{1 - \sqrt{1+4k}}{1 + 1 + 4k} = \text{عفا} \frac{1}{1 + 1 + 4k}$$

امشلم

- ۱۔ لوک جب لا اور لوک بس لا کی ترسیم لا۔۔ سے لا = ۱۱ کہتے ہیں۔
 ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ف (لا) متغیر لا کا مطلق صحیح متغیر ہو تو
 نہا $\frac{f(لا)}{لا} = -$

- ۳۔ ثابت کرو کہ اگر مثبت ہو تو $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$ $n=2$ $\frac{1}{2} = 1$
- ۴۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$ $n=2$ $\frac{1}{2} = 1$
- ۵۔ ذیل کے مضابطوں کو ثابت کرو۔

جَبْرًا = جَمْرًا [لا + ۱] ، جَمْرًا لا = جَبْرًا [لا - ۱]
قَطَرًا لا = لُوكَ [لا + ۱] ، قَمَرًا لا = لُوكَ [لا + ۱]

۶- ثابت کرد که مستقلاً $\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} = \text{لوک لا}$

- ۷۔ ثنابت کرد کہ مساوات جنم لا + جنم ما = م نامہ کو ظاہر کرتی ہے اور اسکے متقارب دریافت کرو۔ [ما = لا قوا، ما = لا قوا]

ذیل کے تفقات کی تصدیق کرو۔

$$۸ - م = قطز لا \quad عف م = - \frac{1}{(لا + ۱) لا}$$

$$۹ - م = قمر لا \quad عف م = - \frac{1}{(لا + ۱) لا}$$

$$۱۰ - م = جب (منر لا) \quad عف م = قطز لا$$

$$۱۱ - م = سن (جنر لا) \quad عف م = قطز لا$$

$$۱۲ - م = سن (منر \frac{1}{لا}) \quad عف م = \frac{1}{لا} قطز لا$$

$$۱۳ - م = سن (س \frac{1}{لا}) \quad عف م = \frac{1}{لا} قط لا$$

$$۱۴ - م = سن \frac{1}{لا + ۱} \quad عف م = \frac{1}{(لا + ۱) لا}$$



پوختاباب

مشتق تفاعل کا استعمال

۴۸۔ مشتق تفاعل کی علامت سے نتائج۔

اگر ما = فم (لا) اور اگر فم لا (x) (مف ما) (y) متغیروں
 لا ما کے ہمزاد یا ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا
 جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے تعریف کی رو سے فم (لا) ہے
 اس لئے انتہا سے قبل ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فم (لا)} + \text{شما}$$

جہاں شما بالآخر معدوم ہونے والی مقدار ہے۔

جس طریق سے نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ اپنی انتہائی قیمت کے قریب
 آتی ہے اسکی توضیح کے لئے ایک عددی مثال دلچسپی سے خالی نہیں ہوگی
 لا = ۱ کے قریب میں ما = لوک لا کی صورت کو لیں یہاں انتہائی قیمت ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}} = ۱۲۳۴۲۹ \dots \dots$$

دوسرے کالم کے عدد مطبوعہ جدولوں سے لئے گئے ہیں

مف لا	مف ما	مف لا
۵۴۱۳۹۳	۵۰۴۱۳۹۳	۵۱۰۰۰
۵۴۲۳۷۹	۵۰۲۱۱۸۹	۵۰۵۰۰
۵۴۳۲۱۲	۵۰۰۴۳۲۱۲	۵۰۱۰۰
۵۴۳۳۲۱	۵۰۰۲۱۶۶۱	۵۰۰۵۰
۵۴۳۴۰۸	۵۰۰۰۴۳۴۰۸	۵۰۰۱۰
۵۴۳۴۱۹	۵۰۰۰۲۱۷۰۹	۵۰۰۰۵
۵۴۳۴۲۷	۵۰۰۰۰۴۳۴۲۷	۵۰۰۰۱

پہلے فرض کرو کہ فم (لا) ہے۔
چونکہ شما کی انتہائی قیمت صفر ہے اس لئے مف لا کو کافی طور پر
چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین کر لیا جاسکتا ہے کہ

فم (لا) + شما = ۰

یعنی (لا) کی رو سے مف ما کی وہی علامت ہوگی جو مف لا کی ہے
مف لا کی تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں ایک خاص مقدار
صفر سے کم ہیں۔

اسی طور پر اگر فم (لا) > ۰ تو مف ما کی علامت مف لا
سے مختلف ہوگی مف لا کی ان تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق مقدار
میں ایک خاص مقدار صفر سے کم ہیں۔

اگر متغیر متبوع کو ہندسی طور پر تغیر کیا جائے جسے شکل (دفعہ ۱ میں) اور
اگر (لا) = ۰ وہاں ہر ایک نقطہ ہے قیمت زیر بحث میں تو ہم یہ کہہ سکتے
ہیں کہ فم (لا) کے مثبت ہونے کی صورت میں ہر کے دائیں جانب
ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل فم (لا) کی قیمت ہر پر کی قیمت

بڑی ہے اور ہر کے بائیں جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل کی قیمت ہر ایک قیمت سے چھوٹی ہے۔ اگر فہ (لا) منفی ہو تو اس بیان میں الفاظ ”چھوٹے“ اور ”بڑے“ کو باہم بدل دینا چاہئے۔ جب ہر (لا) کے وقفہ کے شروع یا اخیر میں ہو تو یہ وقفے بالترتیب ہر کے دائیں اور بائیں جانب واقع ہونگے۔

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فہ (لا) کسی محدود وسعت میں مثبت ہو فہ (لا) کی قیمت (لا) کے ساتھ اس وقفہ میں استقلال کے ساتھ بڑھنے لگے یعنی اگر لا، لا، اس وقفہ میں لا کی کوئی ایسی قیمتیں ہوں کہ لا، لا، تو فہ (لا)، فہ (لا) > فہ (لا) <

کیونکہ فہ (لا) مفروضات کے مطابق قابل تفرق ہے اور اس لئے مسلسل ہے پس وقفہ لا سے لا تک (بیشمول طرفین) اس کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت ضرور ہونی چاہئے۔ سگشتہ استدلال سے واضح ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت نہ تو وقفہ کی ابتدا میں ہو سکتی ہے اور نہ درمیان میں، اس کو لازماً وقفہ کے اخیر پر واقع ہونا چاہئے۔ اسی طرح فہ (لا) کی کم سے کم قیمت کو وقفہ کے شروع میں واقع ہونا چاہئے۔

اسی طرح یہ ظاہر ہے کہ اگر فہ (لا) کسی محدود وسعت میں منفی ہو تو فہ (لا) اس تمام وقفہ میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یعنی اگر اس وسعت میں لا کی کوئی دو قیمتیں لا، لا، ایسی ہوں کہ لا، لا < لا، تو فہ (لا)، فہ (لا) > فہ (لا) <

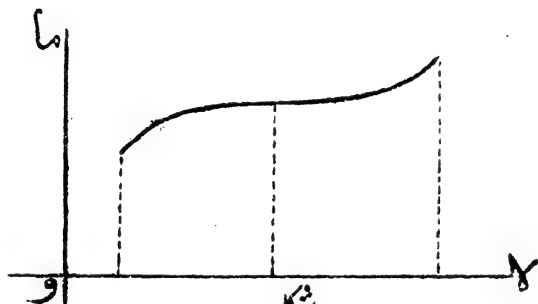
ان نتائج کا ہندسی مفہوم ظاہر ہے۔ جب ایک متغی کا ڈھال مثبت ہو تو معین لا کے ساتھ بڑھتے ہیں، جب ڈھال منفی ہو تو معین لا کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔ مختلف تفاعلوں کی ترسیموں سے جواب اول میں اوی گئی ہیں مذکورہ بالا امور کی توضیح ہوگی۔

اس کے برعکس بیانات کہ اگر فہ (لا) کسی وسعت میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ بڑھتا ہو تو اس وسعت میں لا کی کسی قیمت کے لئے

فما (لا) منفی نہیں ہو سکتا اور اگر فما (لا) کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہو تو فما (لا) مثبت نہیں ہو سکتا یہ سب بیانات فما (لا) کی تعریف سے فوراً مسترد ہو گئے ہیں۔

نیز اگر فما (لا) چند ایک نقطوں کی محدود تعداد پر صفر بھی ہو بشرطیکہ باقی ہر جگہ مثبت ہو تو فما (لا) استقلال کے ساتھ بڑھے گا۔ مثلاً فرض کروا۔ فما (لا) = ۰۔ اور سوائے اس صورت کے باقی وقفہ میں لا = لا سے لا = لا تک جہاں لا = لا فما (لا) مثبت ہے۔ فما (لا) کی کم سے کم قیمت اس وقفہ کے اندر واقع نہیں ہو سکتی اور نہ ہی اوپر کے سرے لا = لا پر، پس اسے لازماً نیچے سرے (لا = لا) پر واقع ہونا چاہئے۔ اسلئے فما (لا) < فما (لا)

یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر فما (لا) مثبت ہو لا = لا سے لا = لا تک اور موخر الذکر قیمت کی صورت میں صفر ہوتا ہو



شکل (۲۸)

اسی طرح اگر فما (لا) ایک نقطوں کی محدود تعداد پر صفر ہوتا ہو لیکن باقی ہر جگہ منفی ہو تو فما (لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

مثال ۱۔ ما = جم لا - (۱ - ۱/۲ لا)

اس سے فرما = لا - جب لا

اور لا کی مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔ چونکہ ما ایک جفت تفاعل ہے اور لا = ۰ کے لئے معدوم ہوتا ہے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$1 < \text{جم لا} < 1 - \frac{1}{4} \text{ لا}^2$$

نیز اگر ما = جب لا = (لا - ۱ - ۱/۴ لا²)

تو فرما = جم لا = (۱ - ۱/۴ لا²)

جس کا مثبت ہونا ثابت ہو چکا ہے۔ اس لئے چونکہ ما = ۰ جبکہ لا = ۰ پس

$$\text{لا} < \text{جب لا} < \text{لا} - \frac{1}{4} \text{ لا}^2$$

لا کی مثبت قیمتوں کے لئے۔

اگر لا منفی ہو تو ترتیب الٹ جانا چاہئے۔

مثال ۲۔ اگر ما = مس لا۔ لا

۹۸

تو فرما = قط لا = ۱ - مس لا

پس فرما مثبت ہے سوائے لا = ۰، ۱، ۲، ۳، ... کے لئے۔ اسلئے

لا کے بڑھنے سے ما استقلال کے ساتھ ہر ایسی وسعت بھر میں بڑھتا ہے جسکے

اندز نقاط عدم تسلسل (لا = ۱/۲، ۳/۲، ۵/۲، ...) میں سے کوئی ایک بھی

شامل نہیں ہوتا۔

پس باسانی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۰ اور ۱/۲ کے درمیان

مس لا - لا = ۰

کی کوئی اصل نہیں اور اسکی ایک اور صرف ایک اصل ہے ۱/۲ اور ۳/۲ کے

درمیان اور علیٰ ان القیاس۔

اس نتیجہ کی ترمیمی عمل سے تصدیق ہو سکتی ہے۔ اگر خطوط

ما = مس لا، ما = لا

کی ترتیبیں بنائی جائیں تو ان کے نقاط تقاطع سے لا کی دو قیمتیں معلوم ہوں گی جنکے لئے
سس لا = لا

۴۹۔ تفاعل کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کے وقفے میں مشتق صفر ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) صفر ہوتا ہو لا = لا اور لا = ب کے لئے اور لا = ب کے درمیان
لا کی تمام قیمتوں کے لئے فہ (لا) محدود ہو تو لا اور ب کے درمیان لا کی
ایک نہ ایک قیمت کے لئے فہ (لا) صفر ہوگا۔

کیونکہ یا تو فہ (لا) سراسر وقفہ لا تا ب میں مستقل طور پر صفر ہوگا یا (وقفہ لا
کی رو سے) اس وقفہ کے اندر لا کی کسی قیمت لا کے لئے اس کی بڑی سے بڑی یا
چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوگی پہلی صورت میں فہ (لا) = تمام وقفے میں اور
دوسری صورت میں فہ (لا) نہ مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی (وقفہ ۴۸)
اس لئے اسے لازماً صفر ہونا چاہئے کیونکہ مفروضہ کے مطابق یہ محدود ہے۔
اس مسئلہ کی ہندی تعبیر یہ ہے کہ اگر کوئی منفی محور لا سے دو نقطوں پر
لے اور منفی کا دھال ہر جگہ محدود ہو تو ان کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور
ہوگا جس پر کا ماس محور لا کے متوازی ہو۔ مثال کے طور پر دیکھو جب لا
کی ترکیب صفحہ ۴۲ پر نیز شکل ۴۶ صفحہ ۴۶۔

یہ احتیاط سے یاد رہے کہ اوپر کے استدلال میں یہ شرائط ضروری ہیں کہ
فہ (لا) اور فہ (لا) میں سے ہر ایک کی تمام وقفہ لا = لا سے لا = ب میں
ایک معین (اور اس لئے محدود) قیمت ہوئی پائے۔ ذیل کی اشکال میں مختلف
صورتمیں ہیں جنکے لئے ایک یا زیادہ شرائط کے لوٹ جائیکے باعث نتیجہ
قائم نہیں رہتا۔



اس دفعہ کے مسئلہ کی ذرا زیادہ وسیع شکل یہ ہے کہ اگر $f(a)$ کی وہی قیمت (جہاں) $f(b) = f(a)$ اور $f(a) = f(b)$ دونوں کے لئے اور اگر $f(a) = f(b)$ مسلسل اور محدود ہونے کے متعلق وہی اوپر کے شرائط پور اکریں تو مشتق تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے درمیان $f(a)$ کی ایک نہایت قیمت کے لئے معدوم ہو گا۔ اوپر کے استدلال کو $f(a)$ - جہاں پر لگانے سے یہ واضح ہے -

مثال ۱- اگر $f(a) = f(b)$ اور $f(a) = f(b)$ تو

$$f(a) = f(b) = f(a) - (a + b)$$

اس لئے $f(a)$ صفر ہوتا ہے $f(a) = \frac{1}{2} (a + b)$ کے لئے جو a اور b کے درمیان ہے۔

مثال ۲- اگر $f(a) = f(b)$ تو $f(a) = f(b) = f(a) - (a + b)$ جب a

یہاں $f(a) = f(b) = 0$ جبکہ $f(a) = f(b) = 2$ اور $f(a) = f(b) = 2$ اس لئے $f(a) = f(b)$ کو a کی کسی درمیانی قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے یہ دفعہ ۲ مثال ۲ کے نتیجے کے مطابق ہے جہاں ثابت کیا گیا تھا کہ مساوات $f(a) = f(b)$ کی ایک اصل a اور b کے درمیان ہے۔

۵۰۔ مساواتوں کے نظریہ میں استعمال۔

اگر $f(a) = f(b)$ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو $f(a) = f(b)$ اور اس کا مشتق $f(a) = f(b)$ دونوں a کی تمام محدود قیمتوں کے لئے مسلسل (اور محدود) ہو جائے اس لئے مساوات

$$f(a) = f(b) = \dots \dots \dots (1)$$

کی کم از کم ایک حقیقی اصل مساوات

$$f(a) = f(b) = \dots \dots \dots (2)$$

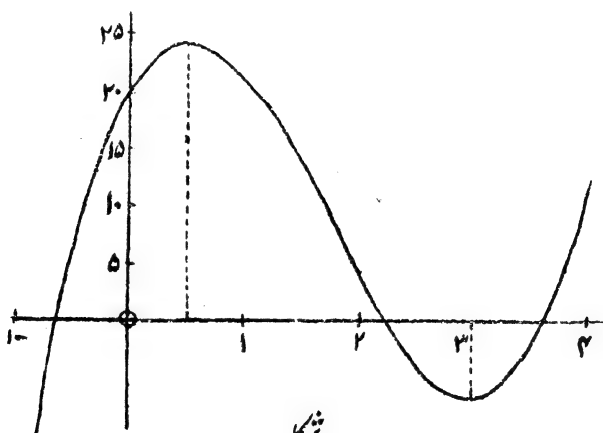
کی حقیقی اصلوں کے درمیان واقع ہوگی، اس نتیجہ کو $f(a) = f(b)$ کے مسئلہ کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور مساواتوں کے نظریہ میں یہ بڑی اہمیت رکھتا ہے۔

اس سے یہ سیدھا نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲) کی زیادہ سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متضاد اصلوں کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں کو جدا کرتی ہیں۔

مثال ۱۔ اگر $f(x) = (x-2)(x^2-2x+1) = (x-2)(x-1)^2$

تو $f(x) = (x-2)(x^2-2x+1) = (x-2)(x-1)^2$ کی حقیقی اصلیں اگر ہیں تو وقفوں $-\infty$ اور $-\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ اور 2 کے درمیان بالترتیب واقع ہوں گی۔ اب اگر $f(x) = (x-2)(x^2-2x+1) = (x-2)(x-1)^2$ تو

$f(x)$ کی علامات ہیں $+$ ، $-$ ، $+$ ، $-$ ، $+$ ۔ پس $f(x)$ کو اوپر گئے وقفوں میں سے ہر ایک میں (دفعہ ۹) ایک دفعہ لازماً صفر ہونا چاہئے۔ اس لئے تین حقیقی اصلیں ہیں، ذیل کی شکل میں $f(x)$ کی ترسیم درج ہے۔



شکل (۳۰)

اگر $f(x)$ کی شکل کی سلسل ترسیم سے مثلاً ایک مستقل کے جمع یا تفرق کرنے سے

اس کی دو اصلیں باہم منطبق کر دی جائیں تو فہم (لا) = کی اصل بھی جوان کے درمیان واقع ہے ان کے ساتھ منطبق ہو جائیگی۔ پس فہم (لا) = کی دوسری اصل فہم (لا) = کی بھی اصل ہوتی ہے زیادہ عام طور پر فہم (لا) = کی (ر) میں رتبہ کی ضعفی اصل کو اگر ایسا خیال کیا جائے یہ الگ الگ ر، اصلوں کے منطبق ہونے سے پیدا ہوتی ہے تو فہم (لا) = کی (ر) درمیانی اصلیں ہونی جو منطبق ہوں گی۔

اس سے کسی دی ہوئی جسمی مساوات کی وضعی اعلیٰ اگر کوئی ہوتا تو ان کے علم
کرنے کا طریقہ اصل ہوتا ہے۔ اگر فضا (لا) کی وضعی اصل عموماً ہوتو
فضا (لا) = (لا - ص) خما (لا) (۳)
جہاں خما (لا) منطق صحیح تفاعل ہے۔ اس لئے

$$f''(a) = (a)'' = (a - a) + (a - a) = 0$$

یعنی (لا۔ ع) اتفاقاً علوں فہم (لا) اور فہم (لا) کا مشترک جزو ضری ہوگا۔ اور یہ ظاہر ہے کہ (لا۔ ع) مشترک جزو ضری نہیں ہوگا جب تک کہ فہم (لا) (لا۔ ع) پر تقسیم نہ ہو سکے۔ پس اگر فہم (لا) کی کوئی قطع فی الصلیں ہوں تو انہیں معمولی جبر یہ طریقوں کی مدد سے فہم (لا) اور فہم (لا) کے مشترک اجزاء، ضری دریافت کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲- فرضاً $(a) = 9 - 4 + 2 + 4 + 12$

$$\text{فَكَانَ (لا) = م لا - ١٨ لا + ٢}$$

معمولی جانچ سے حاصل ہوتا ہے کہ (۱-۲) 'فما (۱) اور فما (۲) کا مشترک جزو ضربی ہے' اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱-۲) 'فما (۱) کا جزو ضربی ہے۔ باقی کے اجزاء آسانی سے معلوم ہو جاتے ہیں' پس

$$(3 + \frac{1}{2}) (1 + \frac{1}{2})^2 (2 - \frac{1}{2}) = (9)$$

مثال ۳۔ شرط مطلوب ہے کہ کئی مساوات $(لا + ق) لا + (ر) = ۰ \dots (۵)$

کی دوسری اصل ہو۔
دوسری اصل اگر ہو تو اسے اس مساوات کو پورا کرنا چاہئے

$$۳ (لا + ق) = ۰ \text{ یا } لا = ۱ - \frac{۱}{۳} ق \dots (۶)$$

(۵) میں درج کرنے سے حال ہوتا ہے

$$ر = ۲ - \frac{۱}{۳} ق \text{ یا } ر = -\frac{۲}{۳} ق \dots (۷)$$

جو مطلوبہ شرط ہے۔

۵۔ اعظم اور اقل قیمتیں۔

مسئلہ تفاعل کی ”اعظم“ قیمت وہ ہے جو بڑی ہو اور ”اقل“ قیمت وہ ہے جو چھوٹی ہو دونوں طرف کی بالکل برابری کی قیمتوں سے۔ زیادہ صحت کے ساتھ اسے کون بیان کر سکتے ہیں۔ فدا (لا) اعظم ہو گا $لا = ۱$ لے لے اگر دو مثبت مقادیر صہ، صہ ایسی معلوم ہو سکیں کہ فدا (لا) بڑا ہو یہ ایسی قیمت سے جو وقفہ $لا = ۱ - صہ$ سے $لا = ۱ + صہ$ کے درمیان لای کی کسی اور قیمت کے جواب میں فدا (لا) اختیار کرتا ہے۔ ایسے ہی اقل قیمت کے لئے۔

چونکہ تفاعل کی ایسی قیمتوں کا باہم مقابلہ کیا جاتا ہے جو لای کے بالکل پاس ہوں اس لئے اعظم قیمت ضروری نہیں کہ تفاعل کی بڑی سے بڑی قیمت ہو اور اسل چھوٹی سے چھوٹی۔ (دیکھو شکل (۳))

فی الحال ہم بحث کو اس صورت تک محدود رکھینگے (اور اس کے اندر تمام ضروری اطلاعات شامل ہیں) جہاں وسعت زیر بحث کے تمام نقطوں پر مشتق قابل تعین اور محدود ہو۔ دفعہ ۴ کے استدلال سے ظاہر ہے کہ اگر فدا (لا) اعظم یا اقل ہو تو فدا (لا) صفر سے مختلف نہیں ہو سکتا۔

کیونکہ اگر یہ مثبت یا منفی ہو تو لا کی عین پڑوس میں ایسے نقطے ہونگے جنکے لئے
فہ (لا) بڑا ہوگا اور دوسروں کے لئے چھوٹا ہوگا تفاعل کی قیمت
فہ (لا) سے۔ پس صورت مجوزہ میں فہ (لا) کی اعظم یا اقل قیمت
کے لئے پہلی شرط یہ ہوگی کہ فہ (لا) معروم ہو۔

یہ شرط ضروری ہے کافی نہیں۔ مزید تقویٰ کی خاطر فرض کرو کہ نقطہ
لا کے دونوں طرف ایک خاص وقفہ ہے جس کے اندر سراسر فہ (لا)
یا تو بالکل مثبت ہے یا بالکل منفی۔ اب اگر فہ (لا) لا کی ان تمام قیمتوں
کے لئے جو لا - صہ اور لا کے درمیان واقع ہوں مثبت ہو تو فہ (لا)
[دفعہ ۴۸] اس وقفہ کے اندر استقامت کے ساتھ بڑے گا اور اگر
فہ (لا) وقفہ لا اور لا + صہ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے
منفی ہو تو فہ (لا) استقامت کے ساتھ اس وقفہ میں گھٹے گا۔ پس اگر
یہ دونوں شرائط پورے ہوں تو فہ (لا) اعظم ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کہ اگر علامات اس طور پر نہ ہوں تو فہ (لا) تفاعل کی
بڑی سے بڑی قیمت وقفہ لا - صہ اور لا + صہ کے درمیان
نہیں ہو سکتی۔

اسے مختصر آیوں بیان کر سکتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری اور کافی
شرط کہ فہ (لا) فہ (لا) کی اعظم قیمت ہو یہ ہے کہ فہ (لا) علامت
بدلے + سے - جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا میں سے گزرے۔
اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ ضروری اور کافی شرط اس امر کے لئے
کہ فہ (لا) فہ (لا) کی اقل قیمت ہو یہ ہے کہ فہ (لا) علامت
بدلے - سے + جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت لا میں سے گزرے۔

* یعنی ایسی صورتوں کو ہم خارج کر دیتے ہیں جہاں فہ (لا) کسی وقفہ کے
اند میں لا مثال ہوتا ہے لا انتہا بار علامت بدلتا ہے۔ نقطہ لا تفاعل
لا اوجب لا میں ایک ایسی مثال ہے۔

ہندی زبان میں اسے یوں بیان کرتے ہیں۔ جب ایک منحنی کا معین اعظم ہو تو ڈھال کو مثبت سے بدل کر منفی ہونا چاہئے اور جب معین اقل ہو تو ڈھال کو منفی سے بدل کر مثبت ہونا چاہئے۔ اور یہی اشکال سے اسکی کافی توضیح ہوتی ہے، مثال کے طور پر دیکھو منحنی ۹، ۱۳، ۱۴، ۲۰۔

جب کبھی مشتق تفاعل فیما (۹) معدوم ہو تو اصلی تفاعل فیما (۹) کے بڑھنے کی شرح (دفعہ ۲۶) تھوڑی دیر کے لئے صفر ہو جاتی ہے اور اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ فیما (۹) کی قیمت مساکن ہے۔ جیسا پہلے بیان کیا گیا ہے یہ ضروری نہیں کہ مساکن قیمت اعظم یا اقل قیمت ہو کیونکہ ایسی صورتیں پیدا ہوتی ہیں جہاں فیما (۹) صفر ہوتا ہے مگر علامت نہیں بدلتا۔

اکثر دلچسپ صورتوں میں مشتق تفاعل فیما (۹) مسلسل ہوتا ہے نیز قابل دریافت (اور محدود) تب یہ صرف قیمت صفر میں سے گذرتے ہی علامت بدل سکتا ہے نیز دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کہ اگر تبدیلیاں + سے - اور - سے + ایک سے زیادہ ہوں تو یہ باری باری واقع ہوتی - اس لئے اعظم اور اقل قیمتیں بھی باری باری یا متبادل واقع ہوں گی۔ دیکھو شکل ۱۴ صفحہ ۲۲

مثال ۱۔ خط مستقیم پر ایک ذرہ حرکت کر رہا ہے، اس کا فاصلہ میں جو ایک اختیاری مبداء سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اعظم ہوگا جبکہ رفتار (فرس) مت بدلتی ہے مثبت سے منفی اور اقل ہوگا جبکہ رفتار منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ مثلاً ایک ذرہ جو جاذبہ ارض کے ماتحت اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس کے لئے

$$س = عت - \frac{1}{2} ع ت^2 \quad \text{فرس} = ع - ع ت$$

پس فرس مثبت سے منفی ہوتا ہے جیسے ت بڑھتے بڑھتے قیمت $\frac{ع}{2}$ فرس

میں سے گزرتا ہے۔ اونچائی میں اس وقت زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔
 مثال ۲۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل معلوم کرو جس کا گھیراؤ دیا گیا ہو۔
 گھیرے کو ۲ فرض کرو۔ دو مستقل اضلاع کے طول لا اور ۱۔ لائے جاسکتے ہیں۔
 میں میں تفاعل (لا ۱ - لا) (۱) کی اعظم قیمت دریافت کرتا ہے۔
 اس کا مشتق ۱ - ۲ لا ہے جو علامت بدلتا ہے + سے - جیسے لا قیمت
 ۱ میں سے گزرتا ہے۔ اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔
 مثال ۳۔ ذیل کے تفاعل کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔

$$\text{فما (لا)} = ۴ لا^۲ - ۲ لا + ۱۸ لا + ۲۰ (۲)$$

$$\text{فما (لا)} = ۱۲ (لا - \frac{1}{4}) (لا - ۳) (۳)$$

یہ تفاعل صرف اس وقت علامت بدل سکتا ہے جبکہ لا قیمتوں $\frac{1}{4}$ اور ۳
 میں سے گزرے۔ جب لا $\frac{1}{4}$ سے ذرا کم ہو تو دوسرے اور تیسرے اجزاء
 ضربی کی علامات - + ہوتی ہیں، لیکن جب لا $\frac{1}{4}$ سے ذرا بڑا ہو تو یہ
 علامتیں + - ہوتی ہیں۔ اس لئے جب لا قیمت $\frac{1}{4}$ میں سے گزرتا ہے
 تو فما (لا) علامت بدلتا ہے + سے -، اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے
 لا بڑھتے رہتے قیمت ۳ میں سے گزرتا ہے تو فما (لا) علامت بدلتا ہے - سے
 +، اسلئے فما (لا) اعظم ہے جبکہ لا $\frac{1}{4}$ اور اقل ہے جبکہ لا = ۳ (۲)
 میں لا کی قیمتیں ۱۲ کے لئے مکمل ہوتی ہیں اعظم قیمت $\frac{1}{4}$ اور اقل - ۳ کے
 دیکھو شکل ۳۰۔

$$\text{مثال ۴۔ فما (لا)} = \frac{۲ لا}{۲ لا + ۱} (۴)$$

$$\text{فما (لا)} = \frac{۲ (لا - ۱)}{(۲ لا + ۱)^۲} (۵)$$

یہ علامت بدل سکتا ہے صرف لا = ۱ کے لئے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے
 (جبر طور پر) قیمت - میں سے گزرتا ہے - لا علامت بدلتا ہے - سے +،
 اور جیسے لا + میں سے بڑھتا ہے - لا علامت بدلتا ہے + سے -، اسلئے

۱۱۔ ا کے لئے فضا (لا) کی اقل قیمت ہے اور یہ -۱ ہے اور لا = ا کے لئے اعظم قیمت = ۱ دیکھو شکل ۱۳ صفحہ ۴۰

مثال ۵۔ فضا (لا) = $\frac{لا^۲}{لا - ۱}$ (۶)

فضا (لا) = $\frac{(لا + ۱)۲}{(لا - ۱)۲}$ (۷)

یہاں فضا (لا) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور تفاعل فضا (لا) کی کوئی محدود اعظم اقل قیمتیں نہیں ہوتیں۔ دیکھو شکل ۱۱ صفحہ ۳۹

مثال ۶۔ قائم مستطی اسطوانہ معلوم کر جس کا حجم دیا ہوا ہو اور جسکی سطح کارقبہ کم سے کم ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کا نیم قطر لا اور ارتفاع ما ہے۔ سطح ہوگی

$۲\pi لا + ۲\pi لا^۲$

اگر دیا ہوا حجم $۲\pi لا^۳$ ہو تو لا^۳ = ما^۳

ما کو سطر کرنے سے جس جملہ کو اقل بنانا ہے وہ ہے لا^۳ + $\frac{۲}{لا}$ اس کا مشتق

تفاعل ہے $۲(لا - \frac{۲}{لا^۲})$ اور یہ علامت بدلتا ہے جسے لا قیمت دے میں سے بڑھتا ہے اور یہ تبدیلی ہے۔ سے + اس لئے لا = اسے سطح کم سے کم ہوتی ہے اور تب ما^۳ = لا^۳ پس اسطوانہ کا ارتفاع قطر کے مساوی ہے۔

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ایسے اسطوانہ کی سطح مساوی حجم کے کرہ کی سطح کا ۱۴۷ دیکھو۔

مثال ۷۔ تفاعل = $\frac{لا + ۲\pi لا + ۲\pi لا^۲}{لا + ۲\pi لا + ۲\pi لا^۲}$ (۸)

کی ”کھڑی“ یا اقل قیمتیں دریافت کرو۔

(لا + ۲\pi لا + ۲\pi لا^۲) = ۰ (۹)

تفرق کرنے اور $\frac{۲\pi}{لا}$ کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

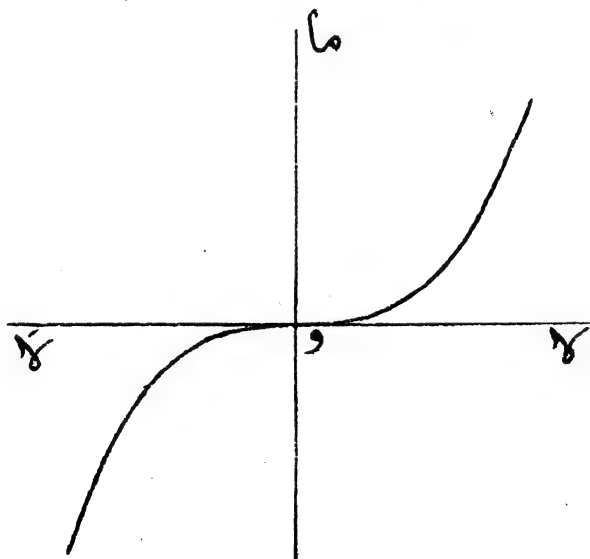
(۱۰) $(ا + لا) = ع$ لا سے ضرب دیکر (۹) سے بچ کر تو

(۱۱) $(ا + لا) = ع$ لا سے ضرب دیکر (۹) سے بچ کر تو
(۱۰) اور (۱۱) کے درمیان ع ساقط کرنے سے لا کی مطلوبہ قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصولوں کے طور پر حاصل ہونگی

(۱۲) $(ا - اھ) + (ا - اھ) = (ا - اھ) + (ا - اھ) = (ا - اھ) + (ا - اھ)$
بخلاف اس کے اگر لا کو ساقط کیا جائے تو ع کی اہل قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتی ہیں

(۱۳) $(ا - اھ) + (ا - اھ) = (ا - اھ) + (ا - اھ) = (ا - اھ) + (ا - اھ)$
مثال ۸ - اہل قیمت کی سادہ سے سادہ مثال جو اعظم یا اقل نہیں ہے ذیل کے تفاعل سے حاصل ہوتی ہے

(۱۴) $(ا - اھ) = (ا - اھ)$



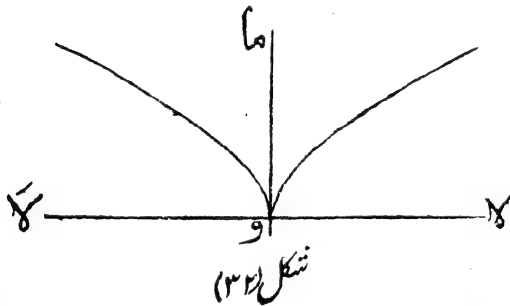
شکل (۳۱)

فما (لا) = ۲ (لا) ۲ جو لا = کے لئے صفر ہوتا ہے مگر قیمت صفر میں سے بڑھنے سے علامت نہیں بدلتا۔ اس لئے فما (لا) اگرچہ "چل" ہے مگر لا = کے لئے اعظم یا اقل نہیں ہے۔ شکل ۳۱ میں (لا) کی ترکیب دی گئی ہے۔

بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ فما (لا) جو عام طور پر مسلسل ہوا کی کسی ایکلی قیمت کے لئے غیر مسلسل ہو جاتا ہے، اگر عدم تناسل کے ساتھ علامت کی تبدیلی بھی وقوع پذیر ہو جبکہ لا بڑھتے بڑھتے قیمت زیر بحث میں سے ہو کر گذرے تو پہلے کے استدلال کی بنیاد پر اعظم یا اقل قیمت پیدا ہوگی۔

مشال ۹۔ اگر فما (لا) = (لا) ۳ (۱۵)

تو فما (لا) = (لا) ۳ (۱۶)
جیسے لا قیمت صفر میں سے بڑھتا ہے فما (لا) - ∞ سے ∞ تک بدلتا ہے
اس لئے فما (لا) اقل ہے لا = کے لئے۔ دیکھو شکل ۳۲۔



نیز شکل ۲۹ میں ایک نقطہ واقع ہوتا ہے جہاں فما (لا) غیر مسلسل ہے اور ایک ایک محدود مثبت قیمت سے محدود منفی قیمت کی طرف گذرتا ہے۔ معین ہمارا اعظم ہے۔

۱۰۶

۵۲۔ جبریتہ طریقے۔ بعض مشہور سوالات محض جبریتہ قابل توجہ ہیں کہ اعظم یا اقل قیمتوں کے بعض مشہور سوالات محض جبریتہ طریقوں سے بغیر احصا کی مدد کے آسانی سے حل ہو سکتے ہیں، یہ خاص طور پر دو درجی جملوں کی صورت میں ہے مکمل مربع کا طریقہ ان سب پر آسانی

پہلی شرط یہ ہے کہ لازماً ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} \quad (۲)$$

جہاں تفرقی سرحدی ہیں دیکھو دفعہ ۳۴۔ کیونکہ اگر عتفاً ل کی کسی اور ایسی قیمت سے جو لا، لا کو خاص حدود کے اندر بدلنے سے حاصل ہو، بڑا یا چھوٹا ہو تو عو بوجہ مستحکم اعظم (یا اقل ہوگا) جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے اور صرف

لا بدلے۔ اس سے بالعموم لازم آتا ہے کہ (دفعہ ۵۱) $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} =$ ، اسی طرح عو کو اعظم (یا اقل) ہونا چاہئے جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے اور صرف لا بدلے۔

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$$

پہلی کی طرح یہ شرائط ضروری ہیں کافی نہیں۔ عام صورت میں اس سوال کی مزید تحقیق آئندہ سوچوئیں باب میں ہوگی لیکن اکثر ایسا ممکن ہوتا ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں غیر متعلق ذرائع سے مل جاتی ہیں اور ان میں شخصیت ہو سکتی ہے۔ شرائط (۲) سے ایسی صورتوں میں سب کچھ مل جاتا ہے جو تکلیلی نقطہ نظر سے

ضروری ہے۔

مثال۔ دے ہوئے حجم والا استیظلی توازی السطح معلوم کرو جس کی سطح کم سے کم فرض کرو کہ لا، لا، می کنارے ہیں اور لا دیا ہوا حجم ہے۔

چونکہ لا، لا، می = لا، لا، لا (۳) تفاعل جو کم سے کم ہوگا وہ ہے

$$ع = لا، لا، می + می، لا، لا = لا، لا + لا، لا + لا، لا \quad (۴)$$

شرائط جف ع = جف ع، جف ع = جف ع، جف ع = جف ع

لا، لا = لا، لا، لا اور ان مساواتوں کا حقیقی حل صرف یہی ہے کہ لا، لا = لا، لا، لا نیز می = لا۔

۱) 'ما' چونکہ اس سوال میں لازماً مثبت ہیں اس لئے (۴) سے ظاہر ہے کہ متوازی السطوح کی سطح کی بجلی انتہا ہے۔ اوپر کی تحقیق سے ظاہر ہے کہ یہ انتہا نہیں پہنچتی جب تک کہ شکل مکعب نہ ہو۔
دفعہ ۵۲ کے مطابق کئی سوالوں کا حل معلومہ جبری متانہات سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

$$(۵) \quad (لا + ما + ی) = \frac{۱}{۳} \{ (لا + ما + ی) + (ما - ی) + (ی - لا) + (لا - ما) \} \dots (۵)$$

$$ما + ی (لا + لا) = لا + ما + ی - \frac{۱}{۳} \{ (ما - ی) + (ی - لا) + (لا - ما) \} \dots (۶)$$

یعنی اگر ایک خط مستقیم کو تین حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ان حصوں کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ یہ حصے مساوی ہوں۔
متوازی السطوح جو ایک دائرہ کے اندر (لا + ما + ی = لا) بن سکے اس کی سطح زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے جبکہ یہ مکعب ہو۔

۵۴۔ تفرقوں کی ترقیم - دفعہ ۴ کی مساوات

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فما} (لا) + \text{شما} \dots (۱)$$

کی طرف پہر ہم رجوع کرتے ہیں۔ اسے یوں لکھا جاسکتا ہے

$$\text{مف ما} = \text{فما} (لا) + \text{مف لا} + \text{شما} \text{مف لا} \dots (۲)$$

جیسے مف لا، صفر کے قریب آتا جاتا ہے بائیں جانب کی دوسری رقم پہنچی رقم کے مقابل میں خفیف اور کم ہو جاتی ہے کہونکہ شما کی انتہائی قیمت صفر ہے۔ اس لئے یہ تقریباً زیادہ صحیح ہوتا جاتا ہے کہ

$$\text{مف ما} = \text{فما} (لا) + \text{مف لا} \dots (۳)$$

یہ مساوات ان معنوں میں پیدا نہیں ہوتی کہ طسرفین تقریباً صفر ہیں بلکہ اس لحاظ سے کہ طسرفین کی صنعت ایک کے قریب آتی جاتی ہے۔ ان معنوی معنوں میں اس مساوات کو اکثر اوقات اس طرح

لکھتے ہیں

فرما = فَمَا (لا) (فر) (۴)

صفر ہونے والی مقداروں مف (لا) مف ما کو تفرقے کہا جاتا ہے۔
نوٹ ضابطہ (۴) میں فَمَا (لا) کا جو مقام ہے اس کے لحاظ سے اس کو
”تفرقی سر“ کہا جاتا ہے۔

طالب علم اوپر کے طرز بیان کو ناروا خیال نہ کرے، یہ محض دستور پر مبنی
ہے۔ اس کے استعمال کی غرض صرف یہ ہے کہ جہاں کہیں حسابات میں مقداریں
مف (لا) مف ما شامل ہوتی ہوں جنہیں بعد میں انتہائی طور پر صفر ہو جانا
ہے ان میں کسی منزل پر مف ما کی بجائے فَمَا (لا) مف (لا) رکھ دیا
جاسکتا ہے جبکہ یہ واضح ہو کہ دوسرے رتبہ کی مقداروں کے نظر انداز کر دینے سے
آخری جواب کی صحت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

۵۵۔ چھوٹی تصحیحات کا محسوب کرنا۔ علاوہ اسکے مساوات

مف ما = فَمَا (لا) مف (لا) کو ایک تقریبی ضابطہ خیال کر کے ایسی صورت
میں استعمال کیا جاسکتا ہے جہاں متبوع متفرق کی چھوٹی تبدیلی کے جواب
میں تقابل کی قیمت پر اثر محسوب کرنا مطلوب ہو تو یہ جیسا ہم نے اوپر
دیکھا ہے باقی ماندہ غلطی یا خطا فَمَا (لا) (لا) کی محض ایک چھوٹی کسر
ہوگی جبکہ مف (لا) نہایت چھوٹا ہو۔ اس کا مشہور عملی استعمال یہ ہے
کہ کسی عددی نتیجہ میں جو کسی خاص معطیات کی بنا پر حاصل کیا گیا ہو غلطی
یا خطا کی مقدار مف و م کی جائے جبکہ معطیات کے اندر کی خطاؤں اور
نادقتیوں کی مقدار مف و م ہو۔

اوپر کا طریقہ ایک لحاظ سے مکمل نہیں۔ اس کے تقریب میں خطا کی
مقدار کی کوئی نشان دی نہیں۔ یہ کمی دفعہ ۵۶ کے مسئلہ سے پوری کیا جاسکتی۔
وہاں ثابت کیا جائیگا کہ

مف ما = فَمَا (لا) (ط) مف (لا) مف (لا) ... (۴)

جہاں طہ کوئی مقدار ہے صفر اور ا کے درمیان - اس لئے اگر وقفہ
لا تا لا + مفا میں مشتق تفاضل کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے
چھوٹی قیمتیں اور جب ہوں تو تقریب (۱) میں خطائی مفا دار
(۱-۱) جب مفا لا سے بڑی نہیں ہو سکتی -

مثال ۱- لوگ جیبوں کی جدول میں ایک منٹ کے لئے فرق محسوب کرو۔

$$\text{اگر } \text{ما} = \text{لوگ جب لا تو } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{مما مم لا}$$

۱۱۰ اور مفا ما = مم مم لا مفا لا تقریباً بشرطیکہ مفا لا کو قوسی
پیمانہ میں بیان کیا جائے۔ رکھو

$$\text{مفا لا} = \text{آکافوسی ناپ} = \frac{12}{1.0800} = 11.111111111111111$$

تو حاصل ہوگا مفا ما = ۱۲۶۳ ۰۰۰ ۵ مم لا
یہ عددی جزو ضربی اس فرق کے مطابق ہے جو آ کے لئے ۵ م کے قرب میں
جدولوں میں مندرج ہے -

مثال ۲- ایک مثلث کے اضلاع ا، ب اور درمیانی زاویہ ج ناپا گیا
ہے، اگر زاویہ کی پیمائش میں خطائی خطا رہ جائے تو تیسرے ضلع کے محسوبہ طول ج
میں خطا معلوم کرو۔

$$\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} - ۲ \text{ا ب جم ج} \dots \dots \dots (۳)$$

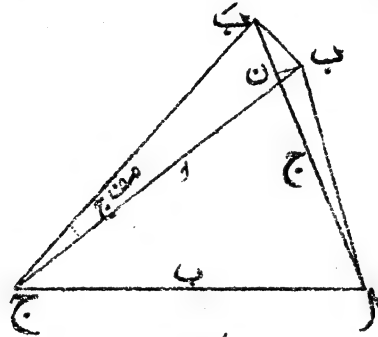
اس مفروض پر کہ صرف ج اور ج بدلیں

$$\text{ج مفا ج} = \text{ا ب جب ج مفا ج}$$

$$\text{جس سے مفا ج} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ج}} \text{جب ج مفا ج} = \text{ا جب ب مفا ج}$$

(۴)
یہ نتیجہ ہندی طور پر بھی حاصل ہو سکتا ہے، مثلاً اگر شکل میں جب ج ب = مفا ج
اور بن (ب) پر عمود دار کھینچا جائے تو بالا خسر

مف ج = ب ن = ب ج ب ج ب ن
 = مف ج ج ب ج ب ن = مف ج ج ب ب
 دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے اگر قطع نظر کی جائے۔ پہرہ کے ناپنے میں اگر



شکل (۳۳)

ذرا سی غلطی ہو تو اس کے جواب میں ج کے محسوب کرنے میں غلطی ہوگی اسے ہم اس مفروض کی بنا پر معلوم کر سکتے ہیں کہ 'ج' صرف بدلتے ہیں چنانچہ
 ج مف ج = (ب ج ب ج) مف ج = ج مف ج مف ج
 یا مف ج = ج ب مف ج (۵)
 اوپر کے نتیجہ کی طرح اس کا بھی ہندسی ثبوت آسانی سے دیا جاسکتا ہے۔

۵۶۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔ نتائج

فصل کا مسئلہ نہایت ضروری ہے اور یہ دفعہ ۴۴ کے مسئلہ کی توسیع ہے۔
 اگر تقاضا (۱) مسلسل ہو اور اس کا مشتق معین یا قابل دریافت
 قیمت رکھتا ہو تمام وقفہ (۱) سے (۲) = ب تک تو

$$\text{فما (ب) - فما (۱)} = \text{فما (۱) - فما (۲)} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں (۱) لہذا کی ایک قیمت ہے اور ب کے درمیان۔

پس مسئلہ کا مفہوم یہ ہے کہ (قیود مذکورہ کے بائحت) ب اور ق کے درمیان کوئی ایک نقطہ ایسا ہے کہ جس پر یعنی ما = قما (لا) کا ماس وتر پ ق کے متوازی ہے۔
وتر پ ق کی مساوات یہ ہے

$$\text{ما} = \text{قما (ا)} + \frac{\text{قما (ب)} - \text{قما (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} \cdot (\text{ا} - \text{ا}) \dots (۵)$$

جس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے اور ظاہر ہے کہ جملہ (۲) منحنی کے معین اور وتر کے متناظر معین کا فرق ہے یہ فرق ب اور ق پر صفر ہوتا ہے پس ب اور ق کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہونا چاہئے جہاں یہ فرق اعظم یا اقل ہو۔

$$\text{مثال اگر قما (لا) = (ا) تو } \frac{\text{قما (ب)} - \text{قما (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} = \text{ب} + \text{ا}$$

جو قما (لا) کی قیمت ہے جبکہ لا = $\frac{1}{1 + \text{ب}}$ اس بیان کا ہندسی مرادف یہ ہے۔ مکانی کا کوئی وتر اس ماس کے متوازی ہوتا ہے جو وتر کی تصحیف کرنے والے قطر کے سرے پر پھینچا جائے۔

کسر $\frac{\text{قما (ب)} - \text{قما (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}}$ یعنی تفاعل کے اضافہ کی نسبت متغیر متبوع کے

اضافہ کے ساتھ اس شرح کا ناپ ہے جسے ہم کسنگے تفاعل کے ”اضافہ کی اوسط شرح“ وقفہ (ب-ا) کے اندر۔ پس اس مسئلہ کا مفہوم یوں بیان ہو سکتا ہے کہ مذکورہ شرائط کے ماتحت کسی وقفہ میں اضافہ کی اوسط شرح، اسی وقفہ کے اندر کسی ایک نقطہ پر اضافہ کی اصلی شرح کے مساوی ہوگی۔

مثلاً وقت کے کسی وقفہ میں ایک متحرک نقطہ کی اوسط رفتار، اس وقفہ میں کسی ایک آن کی اصلی رفتار کے مساوی ہوگی۔

نتیجہ (۱) کو بیان کرنے کے اور بھی طریقے قابل توجہ ہیں۔ اس امر کو کہ لا اور ب کے درمیان واقع ہے اس طور پر بیان کیا جاسکتا ہے

$$لا = ا + طہ (ب - ا) \dots\dots\dots (۷)$$

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ طہ کی ٹھیک قیمت بالعموم ا اور ب کی قیمتوں پر منحصر ہوگی۔ ب کی بجائے ا + ہ لکھنے سے مسئلہ اوسط قیمت کی بڑی مفید صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$فہ (ا + ہ) - فہ (ا) = فہ (ا + طہ ہ) \dots\dots (۸)$$

یا فہ (ا + ہ) = فہ (ا) + ہ فہ (ا + طہ ہ) \dots\dots (۹)
اب اگر ا کی بجائے لا اور ہ کی بجائے مفہ لا لکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

مفہ فہ (لا) = فہ (لا + طہ مفہ لا) مفہ لا \dots\dots (۱۰)
مسئلہ ماقبل سے ایک ضروری استنباط یہ ہے کہ اگر

$$فہ (لا) = \dots\dots\dots (۱۱)$$

۱۱۳ لا کی تمام قیمتوں کے لئے جو ایک خاص وقفہ کے اندر ہیں تو فہ (لا) اس تمام وقفہ میں مستقل ہوگا۔ کیونکہ اگر فہ (لا) بدلتا ہو تو فرض کرو کہ لا کی دو قیمتوں ا، ب کے لئے اس کی نامساوی قیمتیں ہیں۔ کسر

$$فہ (ب) - فہ (ا) \dots\dots\dots (۱۲)$$

ب۔ ا کی قیمت اس صورت میں صفر سے مختلف ہوگی اور اس لئے ان کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت ہوگی جس کے لئے فہ (لا) صفر سے مختلف ہوگا، مگر یہ مفروض کے خلاف ہے۔

علاوہ اس کے اگر دو تین اعلیٰ فہ (لا) اور پہ (لا) کے مشتق ایک سعیت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوی ہوں تو وہ صرف لحاظ ایک مستقل کے ایک دوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ مفروضہ کی رو سے

$$فہ (لا) - پہ (لا) = \dots\dots\dots (۱۳)$$

$$یا \frac{فہ (لا) - پہ (لا)}{فہ (لا)} = \dots\dots\dots (۱۴)$$

اس لئے فہ (لا) - پہ (لا) = مستقل (۱۵) پہلی صورت کی رو سے
اگر (۲) کی بجائے زیادہ عام تفاعل لیا جائے یعنی

فہ (لا) - فہ (ا) - فہ (ب) - فہ (ا) - پہ (ب) - پہ (ا) - پہ (لا) - پہ (ا) (۱۶)
تو اسی طرح کے شرائط کے ماتحت یہ حاصل ہوتا ہے کہ اس کا مشتق تفاعل

فہ (لا) - فہ (ب) - فہ (ا) - پہ (ب) - پہ (ا) (۱۷)
لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو 'ب' کے درمیان ہو۔
یہ نتیجہ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے

فہ (ا+ہ) - فہ (ا) = فہ (ا+طہا) (۱۸)
پہ (ا+ہ) - پہ (ا) = پہ (ا+طہا)
اس لئے اگر فہ (ا) = ۰، پہ (ا) = ۰ (۱۹)

تو نہا فہ (ا+ہ) = نہا فہ (ا+ہ) (۲۰)
پہ (ا+ہ) = پہ (ا+ہ)

یہ ضابطہ "تغیر معین شکل" صفر کے محسوب کرنے میں بعض اوقات
استعمال ہوتا ہے۔

۵۔ ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل کا پورا تغیر۔

فرض کرو کہ ع = فہ (ا، ب) (۱)
'لا' کا مسلسل تفاعل ہے، نیز فرض کرو کہ جزوی مشتقات

جف ع، جف ع
جف ما، جف ما
بھی 'لا' کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مان لو کہ ع کا اضافہ متبوع متغیروں کے اضافوں مف لا، مف ما کے

جواب میں مف ہے یعنی
 مف ۶ = فہ (لا + مف لا) + ما + مف (ما) - فہ (لا) (ما) ... (۳)
 دفعہ ۳۴ کی ہندی تغیر کے موافق افعی مستوی لا ما کے نقاط (لا) (ما)
 اور (لا + مف لا) + ما + مف (ما) کے جواب میں سطح پر جو دو نقطے ہیں مف
 ان کے ارتفاعوں کا فرق ہے -
 اگر صرف لا کو بدلا جائے تو ع کا متناظر اضافہ دفعہ ۵۶ (۱۰) کی رو سے
 اس شکل کا ہوگا

چ مف لا (۴)
 جہاں چ، لا، ما اور مف لا کا ایک خاص تعامل ہے۔ اسی
 دفعہ سے اور تیز دی مشتق کے معنی سے ظاہر ہے کہ چ کی انتہائی قیمت
 جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے چ ہے جہاں

چ = جف ۶ (۵)
 اگر صرف ما کو بدلا جائے تو ع کا اضافہ ہوگا

ق مف ما (۶)
 جہاں ق کی انتہائی قیمت جبکہ مف ما کو لا انتہا کم کر دیا جائے یہ ہے

ق = جف ۶

اب ہم فرض کرتے ہیں کہ حقیقی تغیر لا، ما سے لا + مف لا، ما + مف ما
 تک دو منزلوں میں عمل میں آتا ہے، پہلی منزل میں صرف لا اور دوسری
 میں صرف ما بدلتا ہے۔ تو ع کا عمل اضافہ اس طرح ہوتا ہے

مف ۶ = چ مف لا + ق مف ما (۸)
 جہاں ق، ق سے اس لحاظ سے مختلف ہے کہ دوسرے تغیر کا ابتدائی
 نقطہ (لا) (ما) کی بجائے اب (لا + مف لا، ما) ہے -
 اس صورت میں (۸) کی شکل دریافت کرو جبکہ مف لا، مف ما یکجا

$$\text{چپ} = \frac{\text{فہ} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا} \text{ما}) - \text{فہ} (\text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{لا}} = \frac{\text{فہ} (\text{لا} + \text{طہ} \text{مف} \text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{لا}} \dots (۱۳)$$

$$\text{ق} = \frac{\text{فہ} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا} \text{ما} + \text{مف} \text{ما}) - \text{فہ} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا} \text{ما})}{\text{مف} \text{ما}} = \frac{\text{فہ} (\text{لا} + \text{مف} \text{لا} \text{ما} + \text{طہ} \text{مف} \text{ما})}{\text{مف} \text{ما}} \dots (۱۵)$$

جہاں طہ، طہ ایسی مقداریں ہیں جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔ اسلئے
مف ع = فہ (لا + طہ مف لا ما) مف لا + فہ (لا + مف لا ما + طہ مف ما) مف ما

چونکہ دفعہ ۳۴ کی تعریف کے مطابق فہ، فہ مسلسل فرض کئے گئے ہیں اس
مساوات کی انتہائی شکل یہ ہے

$$\text{مف ع} = \text{فہ} \text{مف لا} + \text{فہ} \text{مف ما} \dots (۱۷)$$

مساوات (۱۱) سے ظاہر ہے کہ اعظم یا اقل قیمت کے قرب میں ع کا تغیر دوسرے
(یا اس سے اعلیٰ) رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے کیونکہ ایسی صورت میں دفعہ ۵۳ سے

$$\text{جف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \dots (۱۸)$$

پس کسی سطح کے اعظم یا اقل ارتفاع کے نقطہ پر ماسی مستوی بالعموم افقی ہوگا۔
جیسا بتایا گیا ہے اس کا عکس لازماً درست نہیں۔ دیکھو دفعہ ۵۱۔

اوپر کے مسئلہ کی متبوع متغیروں لا، ما، می..... کی کسی تعداد کے لئے
بآسانی توسیع کیجا سکتی ہے چنانچہ

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{مف ما} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف می}} \text{مف می} \dots (۱۹)$$

بالآخر۔

۵۸۔ چھوٹی تصحیحات میں استعمال۔

دفعہ ۵۵ کی طرح دفعہ ماقبل کا مسئلہ چھوٹی خطاؤں کے محسوب کرنے میں
استعمال ہو سکتا ہے۔

۵۹۔ تفاعلوں کے تفاعل کا تفرق۔ تفضیلتی تفاعل کا تفرق۔

دفعہ ۵ ضابطہ (۱۱) کا ایک اور مشہور استعمال یہ ہے کہ اسکی رو سے تفاعلوں کے تفاعل اور تفضیلتی تفاعل کا تفرق عمل میں آسکتا ہے۔

(۱) اگر ۶ = فہ (لا، ما) (۱)

جہاں لا، ما ایک متغیرت کے معلومہ تفاعل میں تو آخر الام

مف ۶ = جف فہ لا مف لا جف فہ ما مف لا (۲)

یا فر ۶ = جف فہ لا فر لا جف فہ فر ما فر (۳)

اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے باب دوم کے کئی نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں پہلی ۱۱۔
ترقیم کے موافق ہم لکھ سکتے ہیں

ما = فہ (۶، و)

جہاں ۶ اور و لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ ضابطہ (۳) اس طرح ہو جاتا ہے

فر لا = جف فہ فر ۶ جف فہ فر و جف و فر لا (۴)

مثلاً اگر فہ (۶، و) = ۶ و (۵)

تو جف فہ و = جف فہ ۶ اور فر (۶ و) = فر ۶ + فر و (۶)

جو دفعہ ۳۰ کے مطابق ہے۔

اب اگر فہ (۶، و) = ۶ (۷)

تو جف فہ و = ۱۰ جف فہ ۶ = ۶ لوک ۶ و فہات ۲۸، ۲۴ کی رُو سے۔

اس کے فر (۶ و) = ۱۰ فر ۶ + ۶ لوک ۶ فر لا (۸)

جو دفعہ ۴۵ (۱) کے مطابق ہے۔
(۲) اگر ما' لا کا ضمیمی تفاعل ہو جس کی تفسیر اس مساوات سے ہوتی ہے
فما (لا، ما) = (۹)

تو اس مساوات کو لمباظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

یا $\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$ (۱۰)
یہ دفعہ (۳۵) کے نتیجہ کی توسیع ہے۔

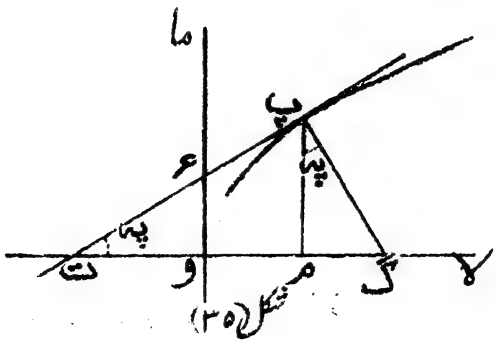
۶۔ مشتق تفاعلوں کے ہندی استعمال - کارٹیزمی محدود۔

دفعہ ۲۴ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر اس زاویہ کو پہا سے تعبیر کریں جو منحنی
ما = فما (لا) (۱) کے کسی نقطہ پر کاماٹس (اسکی دائیں جانب کی
سمت) محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس پہا} \dots \dots \dots (۲)$$

اس ضابطہ کی مدد سے منحنی کے متعلق کئی مقداریں لا، ما اور فر ما کی قوم میں بیان ہو گئیں

۱۱۸



اگر نقطہ پ پر کے ماس اور عماد محور لا ہے بالترتیب ت اور گ پر ماس اور معین کا پایہ ہو تو ت مر کو زیر ماس اور مرگ کو زیر عماد کہیں گے۔

(۳) زیر ماس ت مر = مر پ م پ م = م ا ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۳)

(۴) زیر عماد مرگ = مر پ س پ م = م ا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۴)

ماس = ت پ = م پ ق م پ م = م ا { ۱ + $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2$ } ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۵)

عماد = پ گ = م پ ق ط پ م = م ا { ۱ + $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2$ } (۶)

نیز ماس کے نقطوے محدودوں کے محوروں پر ہیں

(۷) { وقت = و م - ت م = لا - $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ }
و ع = ت و م س پ م = م ا - لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۷)

مثال ۱۔ مکافہ م ا = ۴ ا لا (۸)
یہ طرفین کو ملحوظ لا کے تفریق کرنے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

(۹) م ا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ ا (۹)

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ زیر عماد مستقل ہے اور طول میں ۲ کے مساوی ہے۔

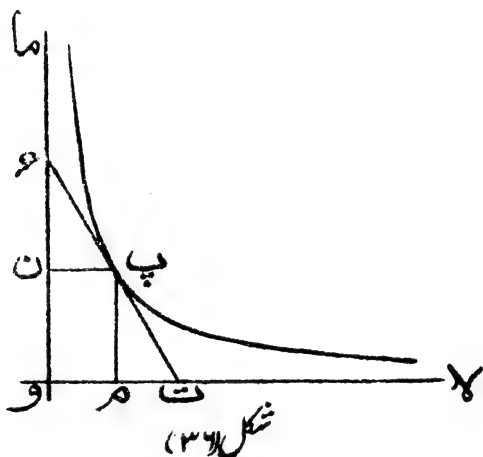
نیز زیر ماس ہے م ا ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{\text{م ا}}{۲ ا}$ (۱۰)

اور اس لئے یہ فصل کا وگنا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مبدأ وقت مر کی تخیف کرنا ہے۔

مثال ۲۔ زائد لا م ا = گ ا (۱۱)

میں $\frac{فرما}{فرلا} + 6 = \dots\dots\dots (۱۲)$

پس ضابطہ (۷) سے ماس کے نقطوں کے محدودوں کے محوروں پر بالترتیب ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ حاصل ہوتے ہیں، اس لئے مر' وقت کی تنصیف کرتا ہے اور اس لئے کثرتِ عمر کی تنصیف کرتا ہے۔ یعنی ماس کا جو حصہ محدودوں کے محوروں کے درمیان گزرتا ہے اسکی نقطہ تماس تنصیف ہوتی ہے۔



اے پ: پ: ت = و: م: م: ت = لا: لا: $\frac{ن}{م}$ لا: م: ن: ... (۱۵)

یعنی ماس عت کی نقطہ ماس مستقل نسبت سے تقسیم ہوتی ہے۔

اوپر کی دو صورتیں اس کے اندر شامل ہیں۔ مکافی میں (مثال ۱) $m = 1$ ، $n = 2$ ۔
 تراکد میں (مثال ۲) $m = 1$ ، $n = 1$ ۔

اس کی ایک ضروری طبیعتی مثال یہ ہے۔ گیس کے حجم اور دباؤ میں ”حسرتاگر“
رشتہ ہے اس مساوات سے بیان ہوتا ہے $P \propto \frac{1}{V}$ (۱۶)
اگر ح کو فصلہ اور د کو معین مان کر ختمی بنایا جائے تو حاس کی نقطہ تماس پر نسبت جمہا
سے تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۳- ناقص $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} = 1$ (۱۴)

کے ذریعہ متعین ہو سکتا ہے جہاں محدود ایک ذیلی متغیر کی قوم میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثلاً حرکیات میں متحرک نقطہ کے محدود وقت کے تفاعلوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ اگر ت کی قیمتوں کا کوئی سلسلہ دیا جائے تو اس سے لا، ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں، اس طرح معنی پر اتنے نقطے مرتب ہو سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں۔ مآ، مات کے ایک ساتھ کے اضافے مف، لا، مف، ما، مفات ہوں تو

$$\frac{\text{مف، ما}}{\text{مف، لا}} = \frac{\text{مف، ما}}{\text{مف، لا}} \div \frac{\text{مف، لا}}{\text{مف، لا}} \quad \text{اس لئے اہتسایں}$$

$$\text{مس پہا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \div \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \quad (۲)$$

مثال ۱۔ ناقص میں لا = رجم فہ، ما = جب فہ (۳)

$$\text{مس پہا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرفلا}} = \frac{\text{ب مم فہ}}{\text{ب مم فہ}} \quad (۴)$$

مثال ۲۔ اگر جاذبہ ارض کے ماتحت کوئی شے حرکت کر رہی ہو تو

$$\text{لا} = \text{ر + عت، ما} = \text{ب + وبت} - \text{پ ج ت} \quad (۵)$$

$$\text{جس سے مس پہا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \div \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{و ج ت}}{\text{و ج ت}}$$

۶۲۔ معنی کے کسی نقطہ پر ماس اور عماد کی مساواتیں۔

(۱) معنی ما = فہ (لا) (۱)
پر دو نقطے پ (لا، ما) اور ق (لا، مف، لا، ما + مف، ما) ہیں، خطب ق پر کسی اور نقطے کے محدود (ظہا، یہا) ہیں جو ذیل کے رشتہ کو پورا کرتے ہیں

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہ} - \text{لا}}{\text{مف} - \text{لا}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{ما}}$$

$$\text{یہ} - \text{ما} = \frac{\text{مف} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{لا}} (\text{ظہ} - \text{لا}) \dots\dots\dots \text{شکل ۱۹ صفحہ ۶۶}$$

انتہا میں جب 'ق' پ کے پاس آجائے تو اس مساوات کی شکل ہو جاتی ہے

$$(۴) \dots\dots\dots \text{یہ} - \text{ما} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (\text{ظہ} - \text{لا})$$

جو نقطہ پ پر کے ماسی خط کی مساوات ہے۔
چونکہ عماد کا ڈھال ماس کے ڈھال کا اول اور علامت میں مختلف ہوتا ہے اس لئے عماد کی مساوات ہے

$$(۵) \dots\dots\dots (\text{ظہ} - \text{لا}) + (\text{یہ} - \text{ما}) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \dots\dots\dots$$

(۲) اگر عماد اس شکل میں ہوں

$$(۶) \dots\dots\dots \text{لا} = \text{فہ} (\text{ت}) \text{ 'ما' } = \text{خما} (\text{ت}) \dots\dots\dots$$

تو (۲) کی رو سے قاطع پ ق پر

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہ} - \text{لا}}{\text{مف} - \text{لا} / \text{مفت}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{مف} - \text{ما} / \text{مفت}}$$

اس لئے پ پر کے ماس کی مساوات ہے

$$(۸) \dots\dots\dots \frac{\text{ظہ} - \text{لا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{یہ} - \text{ما}}{\text{فرما}}$$

عماد کی مساوات باسانی حاصل ہوتی ہے

$$(۹) \dots\dots\dots (\text{ظہ} - \text{لا}) = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + (\text{یہ} - \text{ما}) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$(۱۰) \dots\dots\dots \text{ (۳) اگر منحنی کی مساوات اس شکل فہ (لا 'ما') = \dots\dots\dots}$$

میں معلوم ہو تو دفعات ۳۵، ۵۹ کی رو سے
 فرما $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$ (۱۱)
 اس کے ماس کی مساوات ہے

(۱۲) $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + (\text{یہ} - \text{ما}) = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}$
 یہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ منحنی پر پ کے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے

مف فہ = یا $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{مف لا} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \text{مف ما} =$ (۱۳)

(۱۴) (۲) کی رو سے مف لا : مف ما = ظہ لا : یہ ما
 اے نتیجہ (۱۲) حاصل ہو جاتا ہے۔

(۱۵) عمار کی مساوات ہے $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{جف فہ}} = \frac{\text{یہ ما}}{\text{جف فہ}}$
 $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{جف لا}}$

مثال ۱۔ مکانی ما = ۴ لا (۱۶) میں $\frac{۱۲}{۶} = \frac{۱۲}{۶}$ (۱۷)

(۱۸) ماس کی مساوات ہے یہ ما = $\frac{۱۲}{۶}$ (ظہ لا) (۱۹)

جو (۱۶) کی رو سے معمولی شکل میں آتی ہے ما یہ = ۲ (ظہ لا) (۱۹)

مثال ۲۔ اگر مجدد اس شکل میں دے گئے ہوں لا = ۱ ات ما = ۲ ات (۲۰)

تو ضابطہ (۸) سے ماس ملتا ہے $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{ت}} = \text{یہ ما}$ (۲۱)

اور اس کی مزید تبویل اس شکل میں ہوتی ہے

یہ = $\frac{\text{ظہ لا}}{\text{ت}} + \text{ات}$ (۲۲)

عماد کی مساوات ہے (ظہا۔ لا) ت + (یہا۔ ما) = (۲۳)
 یا ت ظہا + یہا = ا ت + ۲ ا ت (۲۲)
 چونکہ ت میں یہ تیسری درجہ کی مساوات ہے اسلئے کسی اختیاری نقطہ (ظہا یہا) سے تین حقیقی یا خیالی عماد مخرج گئے ہیں۔

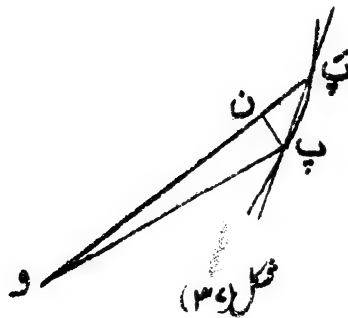
مثال ۳۔ مرکز دار مخروطی (لا + ۲ ا) ھ لا + ما + جب ما = (۲۵)
 کے کسی نقطہ پر ماس کی مساوات (۱۲) کی رو سے یہ ہے

(ظہا۔ لا) (لا + ھ ما) + (یہا۔ ما) (ھ لا + ب ما) = (۲۶)

یا (لا + ھ ما) ظہا + (ھ لا + ب ما) یہا = (۲۷)

۴۳۔ قطبی محدود۔ فرض کرو کہ منحنی پر دو پاس کے نقطے پ' پ

ہیں اور پ کے قطبی محدود (ر' ظہا) اور پ کے (ر + م ف ر' ظہا + م ف ظہا) ہیں پ' پ کو ملا دو اور و پ پر عمود پ ن نکالو تو
 پ ن = و پ جب پ و ن = ر جب م ف ط
 پ ن = و پ۔ و ن = ر + م ف ر۔ ر جب م ف ط = م ف ر + (ا۔ جم م ف ظہا)



۱۲۲ جب م ف ط لا انتہا کم ہو تو جب م ف ط کی نسبت م ف ظہا کے ساتھ
 انتہا میں ایک ہو جاتی ہے اور ا۔ جم م ف ط = ۲ جب م ف ط

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس پ پ و} = \frac{\text{پ پ ن}}{\text{مف ن}} = \frac{\text{رمف ط م}}{\text{مف ن}} + \text{ف م} \dots (۱)$$

جہاں ف م ایک مقدار ہے جس کی انتہائی قیمت صفر ہے۔ پس جب پ پ پ پر منطبق ہو اور ف م دوراویہ ہو جو منحنی کے نقطہ پ پ کا نام ہے جسے ط م کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے، سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{مس ف م} = \frac{\text{رف ط م}}{\text{ف م}} \dots (۲)$$

یہاں ط م کو ر کا تفاعل خیال کیا گیا ہے۔ اگر ر کو ط م کا تفاعل خیال کیا جائے تو ضابطہ ہوگا

$$\text{م م ف م} = \frac{۱}{\text{ر}} \frac{\text{ف م}}{\text{رف ط م}} \dots (۳)$$

مثال ۱۔ دائرہ میں $r = ۲$ جب ط م $\dots (۴)$

$$\text{لوک ر} = \text{لوک ۲} + \text{لوک جب ط م}$$

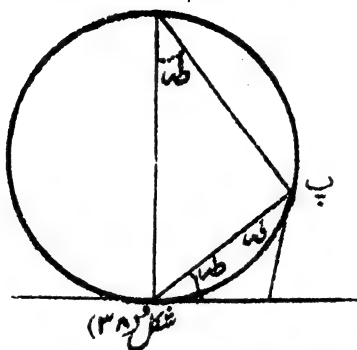
* ذیل کا استدلال جو دفعہ ۲۳ کے اصول کا اطلاق ہے اس طور پر بڑھایا جاسکتا ہے

$$\text{ٹھیک طور پر مس پ پ و} = \frac{\text{رجب مف ط م}}{\text{مف ر} + \text{رجب ۲ مف ط م}}$$

$$= \frac{\text{مف ط م}}{\text{مف ر}} \times \frac{\text{رجب مف ط م}}{\text{مف ط م}} \times \frac{\text{مف ر}}{\text{مف ر} + \frac{\text{رجب مف ط م}}{\text{مف ط م}}}$$

اور اس جملہ کی انتہائی قیمت $\frac{\text{رف ط م}}{\text{ف م}}$ ہے۔

اور اس لئے $\frac{1}{r} = \text{فرقہ} = \text{مم طے جس سے مم فہ} = \text{مم طے یا فہ} = \text{..... (۵)}$



125

مثال ۲۔ جب ایک منجمی کا سمتی نیم قطر اعظم یا اقل ہو تو یہ منجمی کا عماد ہوتا ہے کیونکہ اگر

$$\frac{f_r}{f_v} = \dots = \text{توهم فضا} = \text{افضا} = \frac{f}{2}$$

مثال ۳۔ اگر ایک منحنی کے عماد سب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں تو منحنی کو لازماً دائرہ ہونا چاہئے۔

اگر ثابت نقطہ کو قطب لیا جائے تو مغروض کی رو سے $\frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ اور اس لئے

فر = ۱. طہ کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اس لئے = مستقل۔
فرطہ

امثلة ۱۵

۱۔ دفعہ ۴۹ کے مسئلہ کی ذیل کی صورتوں میں تفسیق کرو۔

(۱) $f(a) = (a-1)^2 (a-2)$

$$(۲) \quad f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)}$$

$$(3) \quad f(n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

۲- ثابت کرو کہ منحنی $ما = لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ - لا^۶$ اور

$$ما = لا^۴ - لا^۳ - لا^۵ + لا^۲ - لا^۶$$

محور لا کو مس کرتے ہیں اور معلوم کرو کہ اس کو کہاں کاٹتے ہیں منحنیات کو مرسم کرو۔

۳- جب لا بڑھتے بڑھتے فضا (لا) کی کسی ایک اصل میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ گزرنے سے عین پہلے فضا (لا) اور فضا (لا) کی مختلف علامتیں ہونگی اور گزرنے کے عین بعد ایک ہی علامت۔ کیا دوسری اصل کی صورت میں بھی یہ درست

۴- اگر $لا < لا$ کیلئے فضا (لا) $= \frac{لا^۲}{لا} - ۱$

اور $لا < لا$ کیلئے فضا (لا) $= ۱ - \frac{لا^۲}{لا}$

لیکن $لا = لا$ کیلئے فضا (لا) $= ۰$

تو ثابت کرو کہ فضا (لا) فضا (لا) دونوں سلسل میں $لا = ۰$ سے $لا = \infty$ تک۔

منحنی $ما = فضا (لا)$ کو مرسم کرو۔

۵- مسافات $لا^۲ - لا^۳ = ۱۶ + لا^۴ = ۰$ کا دوسری اصولوں کے لئے معائنہ کرو۔

بائیں طرف کی رسم کا حصہ کھینچو۔

۶- ثابت کرو کہ منحنی $ما = لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ + لا - ۸$ محور لا کو مس کرتا ہے

اور دیکھو کہ یہ اسکو کہاں کاٹتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر منحنی کا ماس خط $لا + ما = ۰$ کے متوازی ہے۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۷- سروں ۱، ۲، ۳، ۴ کو معلوم کرو کہ منحنی

$$ما = لا^۴ + لا^۳ + ج + لا + د$$

نقطہ (۲، ۸) میں سے گزرے، محور لا کو نقطہ (۲، ۰) پر مس کرے اور اس نقطہ پر جہاں $لا = ۱$ اس کا ماس محور لا کے متوازی ہو۔

۸- ثابت کرو کہ جملہ (لا-۱) $لا + ۱$ کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔

۹۔ ثابت کر دکھ جب لا، لا - $\frac{y^3}{4}$ اور لا - $\frac{y^2}{6} + \frac{y^5}{120}$
کے درمیان واقع ہوتا ہے اور حجم لا، لا - $\frac{y^2}{2}$ اور لا - $\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24}$ کے
درمیان -

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر $\lambda^2 > 1$ تو لوک $(\lambda + 1) - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}$ اور $\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{3}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ تو $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ اور $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

امثلہ ۱۶
(اعظم اور اقل قیمتیں)

۱۔ ثابت کرو کہ نقطہ کی تقسیم حرکت میں رفتار زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم ہوگی جبکہ اس راج علامت بدلے۔

سادہ موسیقی حرکت سے = رجمنٹ سے اسکی توضیح کرد۔

۲- تفاعل ۱-۸ + ۲-۲۲ + ۱-۲۴ + ۱-۱۲ کی اعظم نقل فیتیس دریافت کرد-

۳۔ ثابت کرو کہ تغافل $2 - 3 - 3 - 3 + 10$ ایا اعلیٰ علم ہے جبکہ $2 - 3 - 3 - 3 = 3$ اور اقل ہے جبکہ $3 = 3$ ۔

۴۔ تفاعل ۴ لا^۲ - ۱۸ لا^۲ + ۲۷ لا^۲ - کی کوئی اعظم قل قیمتیں نہیں۔

۵۔ تفاعل لاۛ ۵ لاۛ ۵ لاۛ ۱ کے اصل نقطے دریافت کرو اور اس کا معائنہ کرو کہ تفاعل کن کے لئے اعظم یا اتسل ہے۔

۷- ثابت کرو کہ تفاعل $۱۰\text{لا}^۱ - ۱۲\text{لا}^۲ + ۱۵\text{لا}^۳ - ۲۰\text{لا}^۴ + ۲۰\text{اقل}$ ہے

جبکہ $۱۰ = ۱$ اور اس کے کوئی اور اعظم اور اقل نہیں ہیں۔

۸- اس کا معاملہ کرو کہ مساوات $۱\text{لا}^۱ - ۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا}^۳ - ۲\text{لا}^۴$ کی کوئی مضفی

اصل ہے۔ بائیں جانب کے حصہ پر تفاعل کے اصل نقطے معلوم کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

۹- ثابت کرو کہ منحنی $۱\text{لا}^۱ - ۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا}^۳ - ۲\text{لا}^۴$ کے محور کو دو

نقطوں پر پس کرتا ہے اور اس کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۱۰- ثابت کرو کہ تفاعل $۱\text{لا}^۱ + ۲\text{لا}^۲ - ۳\text{لا}^۳$ اعظم ہے جبکہ $۱ = \frac{۳}{۲}$ اور اقل

قیمت ہے صفر۔

۱۱- ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{(۱-۲\text{لا})}{۳(۱+۲\text{لا})}$ کی اعظم قیمت ہے $\frac{۲}{۳}$ اور اقل

قیمت ہے $\frac{۱}{۳}$ ۔

۱۲- ثابت کرو کہ جملہ $\frac{۱+۲\text{لا}+۳\text{لا}^۲}{۱-۲\text{لا}+۳\text{لا}^۲}$ کی اعظم قیمت ہے ۳ اور اقل

قیمت ہے $\frac{۱}{۳}$ ۔

۱۳- تفاعل $\frac{(۱+۲\text{لا})(۱+۳\text{لا})}{۱+۲\text{لا}+۳\text{لا}^۲}$ کی اعظم قیمت ہے ۲ اور اقل قیمت ہے ۲۔

۱۴- تفاعل $\frac{(۱-۲\text{لا})(۱-۳\text{لا})}{۱+۲\text{لا}+۳\text{لا}^۲}$ کی دو اعظم قیمتیں ہیں ہر ایک $= \frac{۱}{۳}$ اور دو

اقل قیمتیں ہیں ہر ایک $= -\frac{۱}{۳}$ ۔

۱۵- تفاعل $\frac{۹+۲۲\text{لا}+۲۲\text{لا}^۲}{(۳+۲\text{لا})^۲}$ کے اصل نقطے دریافت کرو اور اس کی ترسیم کھینچو۔

[اصل نقطے حاصل ہوتے ہیں مساواتوں $۱ = ۳ = ۹$ سے]

۱۶- $۱۵\text{لا}^۱ - ۱۸\text{لا}^۲ + ۹\text{لا}^۳$ کے اصل نقطے دریافت کرو اور ترسیم کا خاکہ کھینچو۔

۱۷- تفاعل $\frac{۱}{(۱+۲\text{لا})(۱+۳\text{لا})}$ اعظم ہے جبکہ $۱ = ۱$ اور اقل

قیمت ہے صفر۔

جیکہ لا = س ا ر ب

$$۱۷ - \text{ثابت کردہ تفاسیل } م (لا - لا) + م (لا - لا) + \dots + م (لا - لا) + م (لا - لا) \\ \text{اقل ہے جیکہ لا} = \frac{م (لا) + م (لا) + \dots + م (لا) + م (لا - لا) + م (لا - لا) + \dots + م (لا - لا) + م (لا - لا)}{م + م + \dots + م + م}$$

$$۱۸ - \text{طول لہ کی لہروں کی رفتار گہرے پانی پر } \frac{۱}{\lambda} + \frac{\omega}{v} \text{ کے متقابل}$$

ہے جہاں λ ایک خاص خطی مقدار ہے۔ ثابت کردہ رفتار کم سے کم ہوگی جیکہ $\lambda = ۱$ ۔
 ۱۹ - دغلی جہاز کو پانی کے اندر دھکیلنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ رفتار کے مکعب کے موافق بدلتی ہے۔ ثابت کردہ رد کے خلاف نہایت کفایت کے ساتھ جہاز چلانے کی شرح وہ رفتار ہوگی جو رد کی رفتار کا $\frac{1}{2}$ اگتا ہو۔

۲۰ - دی ہوئی برقی رو کو ایک برقی اسٹیشن سے دوسرے تک تار کے ذریعہ لیجا ہے۔ ثابت کردہ کم سے کم لاگت والا تار کا قطر وہ ہوگا جس سے کہ کل لاگت کا سودا اس توانائی کی مقدار کے مساوی ہو جو تار کے گرم کرنے میں ضائع ہوتی ہے۔
 [توانائی کے ضائع ہونے کی شرح عمودی تراش کے بالعکس متناسب ہے]

۲۱ - دغلی جہاز کے روزانہ اخراجات مزدوری کی اجرت، اہل کے سود اور کولہ پر مشتمل ہیں۔ کولہ کے خرچ کی شرح ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار کا مکعب، ثابت کردہ اگر سفر کو کم سے کم لاگت دلی رفتار کے ساتھ طے کیا جائے تو کولہ کی لاگت مزدوری کی مقدار اور سود کے نصف کے مساوی ہوگی۔

۲۲ - عدد دغلی جہازوں میں سے ایک یہ ایک بندرگاہ کی طرف جا رہا ہے دوسرا ٹھیک اس بندرگاہ سے باہر کو جا رہا ہے ان کے راستے ایک دوسرے سے ناویہ ۹۰ بناتے ہیں اور ان کی رفتاروں کی نسبت ۱:۲ ہے۔ ثابت کردہ ٹھیک اس آن میں جبکہ وہ ایک دوسرے کے قریب سے قریب ہوں بندرگاہ سے ان کے فاصلے نسبت ۵:۴ میں ہیں۔

۲۳ - نصف قطر λ کے دائرہ میں برقی رو سے اسکی ذبح سے جو قوت ایک

چھوٹے متفاطیس پر جس کا محور دائرہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اثر انداز ہوتی ہے وہ ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{لا}{(لا + ب)}$ جہاں لا متفاطیس کا فاصلہ ہے دائرہ کی مستوی سطح سے۔ ثابت کرو کہ قوت زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ $لا = \frac{ب}{۲}$ ۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ جملہ $ا + جم + ط + ب$ جب طما کی انتہائی قیمتیں \pm $ا + ب$ ہیں۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ جب $(ط - ع + جم)$ $(ط - ب + ا)$ اعظم ہے یا قل جبکہ $ط = \frac{۱}{۲} (ع + ب + ا)$ $ا + ب + ج + ن$ اورن بالترتیب جفت ہو یا طاق۔

۲۶۔ رفاص کا میلان انتصابی خط کے ساتھ جبکہ ہوا کی مزاحمت کو ملحوظ رکھا جائے

اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے $ط = ا + قو$ $جم (ن + ص)$ ثابت کرو بڑے سے بڑے اہمتر از وقت کے مساوی وقفوں $\frac{ن}{۲}$ کے بعد پیدا ہوتے ہیں اور ایک گھنٹے والا ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۷۔ منحنی $ما = لا + قو$ کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کو قسم کرو۔

۲۸۔ منحنی $ما = لا + لوک لا$ کا اقل معین۔ $۲۶، ۲۷، ۲۸$ ہے۔ منحنی کو قسم کرو۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ ایک عدد لا کے لوکارتم کی نسبت اس عدد کے ساتھ بڑی سے بڑی ہوتی ہے جبکہ $لا = ۱$ ہو۔

۳۰۔ ثابت کرو کہ اگر $ا < ب$ تو جملہ $ا + جم + ب$ جنس لا کی اقل قیمت

یا $ا + ب$ ہے لیکن اگر $ا > ب$ تو اس کی قیمت نہ اعظم ہوگی نہ اقل۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ تفاعل جنس $لا + جم$ لا کی اقل قیمت ہوگی جبکہ $لا = ۰$ ۔

لیکن اور کوئی اقل یا اعظم قیمت نہیں ہوگی۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ تفاعل جنس $لا + جم$ لا کی اعظم قیمت ہوگی جبکہ $لا = ۰$ ، اقل

قیمت ہوگی جبکہ $\frac{5}{4} = \pi$ تقریباً، اور باری باری سے اعظم اور اقل قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوگا جبکہ $(n = \pi + \frac{1}{n})$ تقریباً جہاں $n = 1, 2, 3, \dots$

۳۳۔ تفاعل جمن لا + جمن لا کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔
+ جمن لا جمن لا

مشلہ ۱۱

ہندسی سوالات

- ۱۔ دئے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔
- ۲۔ دئے ہوئے محیط والا مستطیل جس کا قطر چھوٹے سے چھوٹا ہو مربع ہے۔
- ۳۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک دئے ہوئے مثلث میں بن سکتا ہے رقبہ میں مثلث کا آدھا ہوتا ہے۔
- ۴۔ مثلث قائم الزاویہ کے اندر ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اس کا ایک زاویہ زاویہ قائمہ پر منطبق ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مقابل کا کونہ وتر کی تنصیف کرے۔ ثابت کرو کہ مذکورہ حالات کے ماتحت مستطیل کا محیط نہ تو اعظم ہوگا نہ اقل۔

- ۵۔ بڑے سے بڑا یا کم سے کم محیط والا مستطیل معلوم کرو جو ایک دے ہوئے دائرے کے اندر بنایا جاسکتا ہے۔

- ۶۔ دائرہ کے اندر ایک دئے ہوئے نقطہ (میں سے ایک وتر پ (ق) کھینچی گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں پ (ا) اور (ق) کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ وتر (میں سے گزرنے والے قطر پر عمود وار ہو اور زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے جبکہ وتر منطبق ہو۔

- ۷۔ ایک ثابت خط مستقیم اور دو ثابت نقطے (ب) خط کے باہر معلوم ہیں، خط کے اندر ایک ایسا نقطہ پ دریافت کرنا مطلوب ہے کہ (پ) پ (ب) اقل ہو۔

۸۔ کم سے کم رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے اندر بنایا جاسکتا ہے اور بڑے سے بڑے رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے گرد بن سکتا ہے۔

۹۔ ایک چار ضلعی (چاق) جب قطعہ دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے (چاق) قطعہ کا قاعدہ ہے۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو ثابت کر دو کہ

$$(\text{چاق}) = (\text{چاق}) = (\text{قرب})$$

۱۰۔ ایک خط مستقیم نقطہ (ا، ب) میں سے کھینچا گیا ہے اور محدودوں کے (علی القوائم) محوروں کو بالترتیب چاق اور قق پر ملتا ہے، ثابت کر دو کہ $\text{وچ} + \text{وق}$ کی اقل قیمت $1 + 2 \text{ا، ب}$ ہے۔

۱۱۔ ایک خط مستقیم ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے گذرتا ہے، ثابت کر دو کہ کم سے کم طول جو محدودوں کے محوروں کے درمیان قطع ہوتا ہے وہ $(\text{ا، ب} + \frac{1}{2})$ ہے۔

[محور علی القوائم]

۱۲۔ دھات کی مستطیلی چادر کے کونوں سے چار سادی مربے نکال دئے گئے ہیں اور اضلاع کو اوپر موڑنے سے ایک کھلا مستطیلی صندوق بنایا گیا ہے، ثابت کر دو کہ جب صندوق کے اندر کا حجم زیادہ سے زیادہ ہو تو اس کی گہرائی ہوگی

$$\frac{1}{4} \{ \text{ا} + \text{ب} - (\text{ا} - \text{ب} + \text{ب} + \text{ا}) \}$$

۱۳۔ ایک مکان کی دیوار پر ایک ۵ فٹ اونچی کھڑکی ہے اور اس کی دہلیز زمین سے ۲۰ فٹ کی اونچائی پر ہے بتاؤ کہ ایک شخص جس کی آنکھ زمین سے ۵ فٹ اونچی ہے دیوار سے کتنے فاصلے پر نظر ہو کہ کھڑکی کے سامنے اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا متصالی زاویہ بنے۔

۱۴۔ درخت کے اسطوانی تنے سے مستطیلی تراش کا ایک شہتیر کاٹنا مقصود ہے جس کے جھکاؤ کی استواری زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کر دو کہ تراش کا عرض قطر کا نصف ہونا چاہئے اور اس کی گہرائی قطر کی $\frac{1}{2}$ گنا ہونی چاہئے۔

(یہ مان لیا جائے کہ جھکاؤ کی استواری ایسے بدلتی ہے جیسے عرض اور گہرائی کا کلب) ۱۵۔ ایک چراگاہ کے کنارے کے ساتھ ساتھ ایک سیدھی سڑک ہے اور چراگاہ کے ایسے مقام پر ایک شخص ہے جو سڑک کے قریب ترین نقطہ سے ایک میل کے فاصلہ پر ہے۔ وہ کم سے کم وقت میں سڑک کے ایک دور کے مقام تک جانا چاہتا ہے اگر چراگاہ اور سڑک پر اس کے چلنے کی رفتاریں بالترتیب ۴ اور ۵ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُسے سڑک سے ایک ایسے مقام پر جا ملنا چاہئے جس کا فاصلہ ۱ سے ۱/۲ میل ہے۔

۱۶۔ ایک کمرہ کی دیوار پر روشنی کا مبدأ زمین سے کتنی اونچائی پر لگا جائے کہ فرش کے ایسے نقطہ جس کا فاصلہ دیوار سے ۱/۲ سے روشنی کی چمک زیادہ سے زیادہ ہو۔ (یہ مان لیا جائے کہ کسی سطح پر روشنی کی چمک ایسے بدلتی ہے جیسے مبدأ سے فاصلہ کے مربع کا عکس، نیز ایسے بدلتی ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام جو شعاعیں سطح کے عماد کے ساتھ بناتی ہیں)۔

۱۷۔ دو ذرے پ اور ق مستقل رفتاروں ع و ع' کے ساتھ دو ثابت میدانوں میں حرکت کرتے ہیں، یہ خط باہم و برقطع کرتے ہیں اگر ایک ہی وقت میں ذروں کے مقامات (ا اور ب) ہوں اور اگر (ا' = ا و ب' = ب) اور (ا و ب' = سہ تو فاصلہ پ ق کم سے کم ہوگا وقت

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ اور } \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \text{ جم سے کے بعد اور کم سے کم فاصلہ ہوگا}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ جب سہ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \text{ جم سے}$$

۱۸۔ ایک قطعہ مکانی ایک ایسے وتر سے گھرا ہوا ہے جو محور پر عمود وار ہے۔ اس کے اندر بڑے سے بڑا مستطیل بنانا مقصود ہے ثابت کرو کہ اس کا طول قطعہ کے طول کا ۲/۳ ہے۔

۱۹۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک قطع ناقص کے اندر بن سکتا ہے اسکے قطر مساوی مزدوج قطروں پر متعلق ہوتے ہیں۔

۲۰۔ اگر ناقص کے ماس کا طول جو محوروں کے درمیان کٹتا ہے کم سے کم ہو تو ماس کی نقطہ ماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتی ہے جو بالترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۱۔ قطع ناقص کا ماس، مخروطیہ صوری محوروں کے ساتھ تقاطع سے کم سے کم رقبہ والا مثلث پیدا کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ ماس ناقص کے مساوی فردوج قطروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہے۔

۲۲۔ دائری قطع کا محیط دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ قطع کا زاویہ ۲ نیم قطری ہو اور اس صورت میں رقبہ نیم قطر کے مربع کے مساوی ہوگا۔
۲۳۔ ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے، اگر باقی دو اضلاع کا مجموعہ معلوم ہو تو رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ اضلاع مساوی ہوں۔

۲۴۔ ایک بیاضلعی کے چاروں اضلاع، ایک خاص ترتیب میں دے گئے ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا اگر یہ دائرہ کے اندر بن سکے۔

امثلہ ۱۸

[ذیل کے نتائج مان لئے جائیں۔

(۱) قائم دائری اسطوانہ کا نصف قطر اور ارتفاع c ہے، اسکی سطح

۲ $\pi r c$ ہوگی (۲) اس کا حجم $\pi r^2 c$ ہوگا۔

(۳) قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع c اور قاعدہ کا نصف قطر اور مائل ضلع

l ہے۔ اس کی سطح $\pi r l$ ہوگی (۴) اس کا حجم $\frac{1}{3} \pi r^2 l$ ہوگا۔

(۵) کرہ نیم قطر r اسکی سطح πr^2 ہوگی (۶) اس کرہ کا حجم $\frac{4}{3} \pi r^3$ ہوگا۔

۱۔ بڑے سے بڑے حجم کا اسطوانہ جو ایک دے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے کرہ کے حجم کا $\frac{2}{3}$ ہوگا۔

۲۔ بڑے سے بڑے سطحی رقبہ والا اسطوانہ جو ایک دے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جاسکتا ہے اس کی سطح کرہ کی سطح کی $\frac{2}{3}$ ہوگی۔

۳۔ بڑے سے بڑے حجم والا اسطوانہ جس کا سطحی رقبہ دیا ہوا ہے وہ ہے جس کا

ارتفاع قاعدہ کے قطر کے مساوی ہو اور اس کا حجم اُس کرہ کے حجم کا $\frac{۷۵}{۸۱}$ گنا ہوتا ہے جس کا سطحی رقبہ دی ہو۔

۴۔ دئے ہوئے حجم کے لئے کم سے کم سطح والا اسطوانہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اسکی سطح کی نسبت مساوی حجم کے کرہ کی سطح کے ساتھ $\frac{۲۵}{۸۱}$ ہے۔

۵۔ کھلے اسطوانی ظرف کے ابعاد کی نسبت معلوم کرو کہ دئے ہوئے حجم کے لئے اسکی بناوٹ میں مسالہ کی مقدار کم سے کم صرف ہو۔ [اس کا ارتفاع قاعدہ کے نصف قطر کے مساوی ہونا چاہئے۔]

۶۔ قائم مستدیر مخروط کے اندر ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اس کا حجم اعظم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{۱}{۳}$ ہو اور اس کا حجم اسوقت مخروط کے حجم کا $\frac{۲۷}{۸۱}$ ہوگا۔

۷۔ ایک اسطوانہ ایک قائم مستدیر مخروط کے اندر بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ اس کی متعین سطح اعظم ہوگی جبکہ اسطوانہ کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{۱}{۳}$ ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کل سطح کی اعظم قیمت نہیں ہو سکتی اگر مخروط کا نیم زاویہ $۶۶^{\circ} ۳۷' ۳۰''$ [= $\sin^{-1} \frac{1}{3}$] سے بڑا ہو۔

۸۔ دئے ہوئے کرہ کے اندر جو بڑے سے بڑے حجم والا مخروط بنایا جاسکتا ہے اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا $\frac{۲}{۳}$ ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروط کی اٹھنچنی سطح ارتفاع کی اسی قیمت کے لئے اعظم ہوگی۔

۹۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد قائم مستدیر مخروط بنایا جائے تو اس کا حجم کم سے کم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا دگنا ہو۔ نیز ثابت کرو کہ نیم زاویہ $۶۶^{\circ} ۳۷' ۳۰''$ [= $\sin^{-1} \frac{1}{3}$] ہوگا۔

۱۰۔ اگر قائم مستدیر مخروط کا حجم مستقل رکھا جائے تو سطح زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ ارتفاع قاعدہ کے قطر کا $\frac{۲}{۳}$ گنا ہو۔

۱۱۔ دھات کی گول چادر سے ایک قطاع دائرہ کا ٹٹا مقصود ہے کہ باقی حصہ ایک مخروطی ظرف بن سکے جس کی گنجائش زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ قطاع کا زاویہ ۶۶° ہونا چاہئے۔

۱۲۔ کھلے مستطیلی تالاب میں پانی کا دیا ہوا حجم آسکتا چاہئے، بتاؤ کہ اسکے ابعاد کے

- تناسب کیا ہوں کہ سیمیہ سے اس کو منڈھوانے کے اخراجات کم سے کم ہوں۔
 [طول اور عرض دونوں گہرائی کے دو چند ہونے چاہئیں]
- ۱۳۔ مستطیل متوازی السطوح کے تین متقاطع کناروں کا مجموعہ معلوم ہے۔ اس کی شکل دریافت کرو کہ سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔
- ۱۴۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیل متوازی السطوح جو ایک کرہ کے اندر بن سکتا ہے مکعب ہے۔
- ۱۵۔ بڑے سے بڑے حجم والا مستطیل متوازی السطوح جس کی بیرونی سطح معلوم ہو مکعب ہے۔
- ۱۶۔ بند بیضوی منحنی میں بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ رأسوں پر کے تماس مقابل کے اضلاع کے متوازی ہیں۔
- ۱۷۔ بند بیضوی منحنی کے گرد کم سے کم رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اضلاع کی نقاط تماس پر نصف ہوتی ہے۔
- ۱۸۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے وہ مساوی الاضلاع مثلث ہے، اور کم سے کم رقبہ والا مثلث جو دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی مساوی ضلعوں والا مثلث ہے۔
- ۱۹۔ بڑے سے بڑے رقبہ والا کثیر الاضلاع جس کی تعداد اضلاع n دی ہوئی ہو اور جو ایک دائرہ کے اندر بن سکے منظم کثیر الاضلاع ہو گا نیز n اضلاع کا کم سے کم رقبہ والا کثیر الاضلاع جو ایک دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی منظم کثیر الاضلاع ہے۔
- ۲۰۔ یہ مانکر معلوم کیجئے کہ لے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے، بتاؤ کہ اس سے فوراً یہ کس طور پر مستبد ہوتا ہے کہ دے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم گھیرے والا مستطیل مربع ہے۔
- اسی طور پر اوپر کے سوالات ۱۳ اور ۱۵ سے کیا نتائج اخذ ہو سکتے ہیں۔
- ۲۱۔ n اضلاع کا کثیر الاضلاع معلوم گھیرے کے لئے جس کا رقبہ اعظم ہو یا معلوم رقبہ کے لئے جس کا گھیرہ اقل ہو منظم کثیر الاضلاع ہو گا۔
- [امثلہ ۱۰ سوال ۲۴ کا نتیجہ مان لو]۔

اس سے ثابت کرو کہ معلوم گھیرے کے لئے اعظم رقبہ کی شکل یا معلومہ رقبہ کے لئے اقل گھیرے کی شکل، دائرہ ہوگی۔

۲۲۔ ٹیپہ خانہ (پوسٹ آفس) کے قواعد کی رو سے پارسل کے طول اور گھیرے کا مجموعہ ۶ فٹ سے زیادہ نہیں ہونا چاہئے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے حجم والا پارسل جو بھیجا جاسکتا ہے وہ ایک اسطوانہ ہے جو طول میں ۶ فٹ اور گھیرے میں ۴ فٹ ہو۔ اس کے حجم ۲۵۴۶ مکعب فٹ ہوگا۔

امثلہ ۱۹

چھوٹے تغیرات

۱۔ ثابت کرو کہ لوکارتمی تماسوں کی جدول میں ۱۰ مضموب کئے گئے ہوں ۶۰ کی پڑوس میں ایک منٹ کے لئے فرق تقریباً ۲۹۔۔۔۶ ہے۔

۲۔ ایک برج کی بلندی ب اس کے پایہ سے فاصلہ ل پر زاویہ ارتفاع (عما) مشاہدہ کرنے سے معلوم کی گئی ہے، ثابت کرو کہ مشاہدہ شدہ ارتفاع میں خطا صف عما کے جواب میں خطا ہے

مقاب = اقط عما صف عما

اگر $a = ۱۰۰$ فٹ، $e = ۳۰$ اور زاویہ میں خطا α ہو تو ثابت کرو کہ مقاب = ۴۷ انچ۔

۳۔ ۱۰ کا جذر الکعب دریافت کرو، یہ معلوم ہے کہ ۱۰ کا جذر الکعب ۴۷۴۶۳۱۶ ہے۔ (۴۷۴۶۵۰۰)

۴۔ لوگ ۱۰ = ۲۵۳۰۲۶ معلوم ہے، لوگ ۱۰ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔ جواب :- (۴۷۴۶۱۵۱)

۵۔ ضد لوکارتموں (۱۰ = ۱) کی جدول میں ۴ کے محاذی اندراج ۲۵۵۱۱۸۸۶ ہے، ۵ کے ضد لوکارتم دریافت کرو۔ (۴۷۴۶۹۴۳)

جواب :- (۲۵۵۱۲۱۷۹)

۶۔ لوگ تماس سے ایک زاویہ دریافت کیا جائیگا۔ اگر لوگ تماس کے

محسوب کرنے میں غلطی ۱۰۰۰ رہ گئی ہو تو قوسی سکندوں میں زاویہ کی خطا دریافت کرو، زاویہ ۳۰ کی پروسس میں ہے۔ [۲۰.۵۶]

۷۔ لوک قاطعوں کی جدول میں جو اساس ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہیں، ایک منٹ کے لئے فرق ۳۰ کی پروسس میں تقریباً ۰.۰۰۰۰ ہوگا۔

۱۳۵

۸۔ معلوم ہے جمنہ ۵ = ۲۰.۹۹، جمنہ ۱۰ = ۵۱.۰۱ کی قیمت محسوب کرو۔

۹۔ مسنر ۵ = ۲۰.۹۹، مسنر ۱۰ = ۵۱.۰۱ کی قیمت معلوم کرو۔ [۲۰.۵۶]

۱۰۔ اگر فم (لا) مسلسل اور قابل تفرق ہو سو اسے قیمت (لا) = (لا پر جہاں) یہ لائننا ہی ہو جاتا ہے تو ثابت کرو کہ فم (لا) بھی لائننا ہی ہوگا۔

۱۱۔ حماسی برق یمامیں سوئی کے انحراف کا حماس برقی رو کے متناسب ہوتا ہے، ثابت کرو کہ قرائت کی معلوم خطا کے جواب میں جو رو کی محصلہ قیمت میں متناسب خطا ہوگی وہ کم سے کم ہوگی جبکہ انصراف ۴۵ ہو۔

۱۲۔ ایک عددہ کے محور پر ایک نقطہ اور اس کی تصویر یا خیال کے فاصلے

عدد سے (لا، لا) ذیل کے رشتہ سے مربوط ہیں $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$

ثابت کرو کہ کسی چھوٹی شے کی طولی تضعیف (لا) ہے۔

۱۳۔ ایک کرنیک وپ، و کے گرد زاوی رفتار سہ کے ساتھ گھومتا ہے، ایک و اہل صلاح پ ق پ پر عمل کر دی گئی ہے اور ق ایک ثابت نالی و لا میں حرکت کرنے کے لئے مجبور ہے، ثابت کرو کہ ق کی رفتار سہ x و میں ہے جہاں س ایسا نقطہ ہے جس پر خط ق پ (عددہ بشرط ضرورت) و میں سگد زیا و لا پر عمودی خط سے ملتا ہے۔

۱۴۔ ایک جسم کی کثافت (س) ہو اور پانی میں اس کے اوزان بالترتیب (و، و) سے حاصل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ تو سنے کی خطا و مف و مف و کے جواب میں کثافت کی متناسب خطا ہوگی۔

$$\frac{\text{مف س}}{\text{س}} = \frac{\text{و}}{\text{و}} - \frac{\text{و}}{\text{و}} \times \frac{\text{مف و}}{\text{و}} + \frac{\text{مف و}}{\text{و}} - \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

۱۵۔ ایک کرہ کا نیم قطر رہا اور پانی میں تولنے سے نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے متناسب خطا ہوگی

مفار = $\frac{\text{مف} - \text{مف} + \text{مف}}{3} = \frac{\text{مف} - \text{مف} + \text{مف}}{3}$ جہاں مف و مف بالترتیب ہوا اور پانی

کے اندر وزن ہیں۔

۱۶۔ ناقص کے رقبہ (۵۰) کی خطا جبکہ نیم محوروں کو اب کے ناپے میں چھوٹی
خطائیں ہوں یہ ہوگی

$$\frac{\text{مفاب}}{ب} + \frac{\text{مفاد}}{ا} = \frac{\text{مفاسی}}{ا ب}$$

۱۷۔ اگر مثلث کے تینوں اضلاع 'ا'، 'ب'، 'ج' ناپے جائیں تو اضلاع کی میپائش میں چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے زاویہ 'ا' کی خطا ہوگی

$$\text{مف} = \frac{\text{ج} \text{ا}}{\text{ج} \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ج}} - \frac{\text{م} \text{ا}}{\text{م} \text{ب} \text{ج}} = \frac{\text{م} \text{ب} \text{ج} \text{ا}}{\text{ج} \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ج}} - \frac{\text{م} \text{ب} \text{ج} \text{ا}}{\text{ج} \text{ب} \text{ج} \text{ب} \text{ج}}$$

۱۸۔ ایک مثلث کا رقبہ قیاس کے ایک ضلع اور متصل زاویوں

(ج) اپنے سے حال کیا گیا ہے ثابت کرو کہ پیمائش کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے رقبہ میں متناسب غلطی ہے

$$\frac{\text{مفاج}}{\text{ق}} = \frac{\text{مفاج}}{\text{ج}} + \frac{\text{مفاج}}{\text{ب}} + \frac{\text{مفاج}}{\text{ج ب}}$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر تصدیق کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کا رقبہ Q اس کے اضلاع کے طولوں a ، b ، c سے محسوب کیا گیا ہے اگر ایک ہی مقدار x سے a کو گھٹایا اور b کو بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ اسکی وجہ سے رقبہ میں تبدیلی ہوگی

$$\frac{2(1-b) \text{ عم}}{ج^2 - (1-b)^2} = \frac{\text{مفق}}{\text{ق}}$$

ما = ۲ کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان میں سے دو نقطوں پر ایک ہی ماس ہے۔
 ۶۔ مبدأ سے منحنی ما = ۴ لا - ۱۲ لا + ۹ لا - ۲ لا کے جو ماس گنچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں دریافت کرو۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر ماس محور کا کے متوازی ہے۔ شکل بناؤ۔
 ۷۔ ایک منحنی کے کسی نقطہ کا ماس اور معین دونوں کھینچ گئے ہیں، معین کے پایہ سے ماس پر عمود نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ہے ما ÷ { ۱ + (فرما) } $\frac{1}{2}$ اس لئے ثابت کرو کہ زنجیر ما = ج جنم $\frac{لا}{ج}$ میں یہ عمود مستقل ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ مبدأ سے ماس پر عمود (ما - لا فرما) ÷ { ۱ + (فرما) } $\frac{1}{2}$ ہے۔
 دائرہ ما = ± لا - لا کی صورت میں اس کی تصدیق کرو کہ یہ عمود مستقل ہے اور قائم قطع زائد لا ما = ک کی صورت میں یہ $\frac{ک^2}{لا + لا + ما}$ کے مساوی ہے۔
 ۹۔ توت نامی منحنی (شکل ۲۲ صفحہ ۱۱۰) ما = ب و میں ثابت کرو کہ زیر ماس مستقل ہے اور زیر عماد $\frac{ما}{ب}$ ہے۔

۱۰۔ زنجیر ما = ج جنم $\frac{لا}{ج}$ میں زیر ماس ج جنم $\frac{لا}{ج}$ ہے، زیر عماد

$\frac{1}{4}$ ج جنم $\frac{لا}{ج}$ اور عماد $\frac{ما}{ج}$ ہے۔

۱۱۔ منحنی ما = ۱ - لا کا زیر ماس ن لا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ منحنی (لا) + (ب) = ۲ کی تمام قیمتوں کے لئے

خط مستقیم $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۲$ کو نقطہ (و'ب) پر پس کرتا ہے۔

۱۳۔ جیبوں کے منحنی $ما = ب$ جب $\frac{لا}{ر}$ میں زیر ماس $\frac{لا}{ر}$ مس $\frac{لا}{ر}$ ہے

زیر عماد $\frac{۱}{۲}$ جب $\frac{لا}{ر}$ اور عماد $ب$ جب $\frac{لا}{ر}$ $\left[۱ + \frac{ب \cdot بجم}{\frac{لا}{ر}} \right]$

۱۴۔ ثابت کرو کہ منحنی $ما = قو$ جب $ب = لا$ $ما = قو$ - عماد

ان نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں پر $ب = لا = ۲ن + \frac{۲}{۲}$ جبکہ $ن$ صحیح عدد ہے
منحنیوں کو کھینچو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مبداء میں سے خطوں کا ایک جوڑا ایسا کھینچ سکتا ہے کہ ہر ایک خط ان تمام منحنیوں کو مس کرے جو مسادات $ما = ج$ جن $\frac{لا}{ر}$ میں $ج$ کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک متحرک نقطہ کی رفتار (ع) کو معین اور رقبہ مرتسمہ کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عماد زیر عماد سے تعبیر ہوگا۔

۱۷۔ ایک ذرہ کی توانائی بالفعل $\left(\frac{۱}{۲} م ع^۲ \right)$ کو معین اور فضا میں کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ قوت منحنی کے دھال سے تعبیر ہوتی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ منحنیات $ما = ۲$ $\left(\frac{لا}{ر} - ۱ \right)$ $\frac{لا}{ر} + \frac{ما}{ب} = ۱$

کے ماسوں کی مساواتیں بالترتیب ذیل کی شکلوں میں رکھی جاسکتی ہیں

$$ما = ۲ \left(\frac{لا}{ر} - ۱ \right) \left\{ \frac{لا}{ر} + \frac{ما}{ب} \right\} = ۱$$

۱۹۔ خط $ما = م$ $لا + ج$ کے متوازی، مخروطی تراش $فص$ $(لا، ما) =$ کے ماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط ماس کے ملانے والے خط کی مسادات ہے

$$\frac{جف فص}{جف لا} + \frac{جف فص}{جف ما} = ۰$$

۱۳۹

۲۰۔ محدود انخدا والے بند بیضوی منحنی کے وتر ایک ثابت سمت کے متوازی کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اس نظام میں کم از کم ایک وتر ایسا ضرور ہے جسکے سروں پر کے ماس متوازی ہیں۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ناقص $\Delta = \Delta$ (جم + طہ + عہ) 'ما = ب جم (طہ + جہ) میں نقطہ طہ پر کا ماس نقطہ طہ میں سے گزرنے والے نیم قطر کے متوازی ہوگا اگر $\Delta - \Delta = \Delta = \frac{\pi}{2}$ ۔

۲۲۔ ناقص $\Delta = \Delta$ (جم + طہ + رجب طہ + ما = ب جم طہ + ب جب طہ کے صدری محوروں کے جواب میں طہ کی قیمتیں دریافت کرو

$$[مس ۲ طہ = \frac{۲ (ا + ا + ب ب)}{ا + ب - ا - ب}]$$

۲۳۔ اس کے لئے شرط کہ منحنی فہ (لا + ما) = کا عماد مبداًیں سے گزرے یہ ہے $\Delta = \frac{جف فہ}{جف ما} - \frac{ما جف فہ}{جف لا} = ۰$

محرومی تراش $\Delta + ۲$ ھ لا + ما + جب ما = اکے صدری محوروں کی مساوات دریافت کرو۔

۲۴۔ اگر $\Delta < ۲$ تو مبداً سے کافی لا = ۲ (ما + ب) کے تین حتمی ماس کھینچ سکتے ہیں۔

۲۵۔ قائم زائد لا = ما = ا کے کسی نقطہ پر کا عماد محدود کے محوروں پر جو نقطہ بناتا ہے انہیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ زائد لا = گ ت، ما = گ کے ماس کی مساوات

$$\Delta + ت = ما = ۲ گ ت ہے۔$$

۲۷۔ اگر لا + ما = ا تو ثابت کرو کہ لا + ما اعظم ہوگا جبکہ لا = ± ما منحنی کو مرکز ماس کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما = ا سے اس کا نیاہ سے زیادہ نیم قطری ہوتا

۱۸۹ اس ۱ ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ مکانی $\frac{1}{r} = \text{جب } \frac{1}{\rho} \text{ میں جہاں ماس کے قطب ہے } f = \frac{1}{2} - \frac{1}{\rho}$

اس لئے ثابت کرو کہ ماس ماسکی فاصلہ اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔

۲۹۔ ایک منحنی پر دو متصل نقطے پ' پ' لئے گئے ہیں، خطوط مستقیم پ' پ' اور نیم قطروں پر ملی القوا تم کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پ' پ' کی انتہائی قیمت جبکہ

پ' پ' پر منطبق ہو $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}$ ہے۔۳۰۔ $f = \frac{1}{2}$ وہ زاویہ ہے جو منحنی کا ماس مبدا میں سے گزرنیوالے سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتا ہے ثابت کرو کہ

$$\text{مس } f = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}}$$

۳۱۔ قائم قطع زائد $\frac{1}{r} = \text{جم } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}$ میں ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نیم قطر اور ماس کے درمیانی زاویوں کی تقصیف کرتے ہیں سمت میں مستقل ہیں۔۳۲۔ ثابت کرو کہ منحنی $\frac{1}{r} = f - \frac{1}{\rho}$ کے ماس کی مسادات نقطہ $\rho = \frac{1}{f}$ پر ہے

$$\frac{1}{r} = f - \frac{1}{\rho} = \text{جم } \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) + f - \frac{1}{\rho_0} = \text{جب } \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) + f - \frac{1}{\rho_0}$$

اسلئے ثابت کرو کہ مخروطی تراش $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + 1$ زجم ρ کے ماس کی مسادات

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \text{جم } \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) + f - \frac{1}{\rho_0}$$

پانچواں باب

اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

۶۴۔ تعریف اور ترقیم۔ اگر ما متغیر لا کا تفاعل ہو تو مشتق تفاعل فرما بھی عموماً لا کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ فرما کو تفرق کرنے کا نتیجہ فرلا۔ دوسرے تفرقی سر یا دوسرے مشتق کہلاتا ہے اور اگر یہ تفرق کے قابل ہے تو نتیجہ کو تیسرے تفرقی سر یا تیسرے مشتق کہتے ہیں اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ والے مشتقوں کے لئے۔ اگر فرے کو اس عمل کی علامت تصور کیا جائے تو پہلے دوسرے تیسرے ن ویں مشتقوں کو بالترتیب حسب ذیل علامات سے ظاہر کیا جائیگا

فرلا (فرے) ما (فرے) ما (فرے) ما

انکی زیادہ عام شکل ہے فرلا فرما فرلا فرما فرنا انہیں اوپر کی علامات کا اختصار سمجھنا چاہئے۔

نیز دفعہ ۲۵ کے مطابق فرے کے بجائے عف لکھنے سے ہمیں عف ما عف ما عف ما عف ما مل جاتے ہیں۔

رکھنے سے عام ضابطہ دریافت ہو سکتا ہے۔ کیونکہ اسکی مدد سے

$$\text{عف}(\text{فو}) = \text{علاجم بہلا} = \text{علاجم بہلا} - \text{بہجب بہلا} \quad (۱۸)$$

$$= \text{ر} \text{فو} \text{علاجم بہلا} + \text{طہا}$$

اور اس نتیجہ کو بار بار استعمال کر کے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{عف}^{\text{ن}}(\text{فو}) = \text{علاجم بہلا} = \text{ر}^{\text{ن}} \text{فو} \text{علاجم بہلا} + \text{ن طہا} \dots (۱۸)$$

$$\text{اسی طرح } \text{عف}^{\text{ن}}(\text{فو}) = \text{علاجم بہلا} = \text{ر}^{\text{ن}} \text{فو} \text{علاجم بہلا} + \text{ن طہا} \dots (۱۹)$$

$$\text{مثال ۶۔ اگر } \text{ما} = \text{لوگ لا} \dots \dots \dots (۲۰)$$

$$\text{تو } \text{عف}^{\text{ما}} = \text{لا}^{\text{ما}} \text{عف}^{\text{لا}} = \text{عف}^{\text{ما}} = \text{لا}^{\text{ما}} \text{عف}^{\text{لا}} = \text{عف}^{\text{ما}} = \text{لا}^{\text{ما}} \text{عف}^{\text{لا}} \dots \dots \dots$$

$$\text{اور کل ماہر ہے } \text{عف}^{\text{ن}} \text{ما} = \text{علاجم بہلا} = \text{ر}^{\text{ن}} \text{فو} \text{علاجم بہلا} + \text{ن طہا} \dots \dots \dots$$

$$(۲۱) \dots \dots \dots \frac{\text{ن-۱}}{\text{ن}} \dots \dots \dots$$

۴۵۔ مائل ضرب کے متواتر مشتقات۔ لیبنیز کا مسئلہ

اگر ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہوں تو دفعہ ۳۱ (۲۰) کی رو سے

$$\text{عف}(\text{عو}) = \text{و} \times \text{عف} \text{ع} + \text{ع} \times \text{عف} \text{و} \dots \dots \dots (۱)$$

اگر اسے ہم دوبارہ تفریق کریں تو

$$\text{عف}^{\text{ع}}(\text{عو}) = \text{عف}(\text{و عف} \text{ع}) + \text{عف}(\text{ع عف} \text{و})$$

اب مذکور بالا ضابطہ کے مطابق

$$\text{عف}(\text{و عف} \text{ع}) = \text{و عف}^{\text{ع}} \text{ع} + \text{عف} \text{ع} \times \text{عف} \text{و}$$

$$\text{اور } \text{عف}(\text{ع عف} \text{و}) = \text{عف} \text{ع} \times \text{عف} \text{و} + \text{و عف}^{\text{و}} \text{و}$$

$$\text{پس } \text{عف}^{\text{ع}}(\text{عو}) = \text{و عف}^{\text{ع}} \text{ع} + \text{عف} \text{ع} \times \text{عف} \text{و} + \text{و عف}^{\text{و}} \text{و} \dots (۲)$$

حاصل ضرب کے ن میں مشتق کے لئے مامضابطہ ہے

$$\text{حف}^1(\text{ع} \times \text{و}) = \text{و} \text{حف}^1 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^1 \text{و} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2} \text{حف}^2 \text{ع} \times \text{حف}^2 \text{و} + \dots$$

$$\dots + \text{ن} \text{حف}^1 \text{ع} \times \text{حف}^1 \text{و} + \text{و} \text{حف}^1 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^1 \text{و} \dots (۳)$$

اس میں رقموں کے سرورہی ہیں جو مسئلہ ثنائی میں ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کو کلیتہً نے دریافت کیا نتیجہ (۳) کی صداقت ثابت کر نیکیے لئے ع و کے چند ابتدائی مشتقوں کے حاصل کرنے کے طریقے پر غور کرو۔

ہم مشتقوں کے لئے زبرنگی ترتیم استعمال کریں گے

$$\text{حف}^1(\text{ع} \times \text{و}) = \text{و} \text{حف}^1 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^1 \text{و} \dots (۴)$$

پس اس کو دوبارہ تفریق کرنے سے

$$\text{حف}^2(\text{ع} \times \text{و}) = \text{و} \text{حف}^2 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^2 \text{و} + \text{و} \text{حف}^1 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^1 \text{و} \dots (۵)$$

اگلے تفریق سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{حف}^3(\text{ع} \times \text{و}) = \text{و} \text{حف}^3 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^3 \text{و} + \text{و} \text{حف}^2 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^2 \text{و} + \text{و} \text{حف}^1 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^1 \text{و} \dots (۶)$$

اس آخری ضابطہ کی پہلی سطر ضابطہ (۵) کی ہر رقم کے پہلے تغیر کو تفریق کرنے سے حاصل ہوئی ہے اور دوسری سطر دوسرے تغیر کو تفریق کرنے سے۔ پس حاصل ہوا کہ

$$\text{حف}^4(\text{ع} \times \text{و}) = \text{و} \text{حف}^4 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^4 \text{و} + \text{و} \text{حف}^3 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^3 \text{و} + \text{و} \text{حف}^2 \text{ع} + \text{ع} \text{حف}^2 \text{و} \dots (۷)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ضابطہ (۷) کی ر میں رقم کا عددی سر ضابطہ (۵) کی ر میں اور (۷) کی ر میں رقموں کے عددی سرورہی کا مجموعہ ہے۔ اور متواتر قدموں کے طرز سے ظاہر ہے کہ یہ قاعدہ اگلے مشتقوں کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ اب عین ہی قاعدہ (۱+ج) کی متواتر قوتوں کے پھیلاؤ میں سرورہی کے مرتب کرنے کا ہے اور چونکہ حف(ع و) کے سرورہی ہیں جو (۱+ج) کی پہلی قوت کے سرورہی تو ثابت ہوا کہ حف(ع و) کے پھیلاؤ میں سرورہی ہونے کے (۱+ج) کے پھیلاؤ میں ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ اگر ما = لا ع (۸)

تو عفا = لا عفا + ن عفا × عفا (۱-ن) عفا، چونکہ عفا لا =

= لا عفا + ن عفا - عفا (۹)

پس اگر ما = لا جب بہ لا (۱۰)

تو عفا ما = لا عفا (جب بہ لا) + ۲ عفا (جب بہ لا)

= - بہ لا جب بہ لا + ۲ بہ جم بہ لا (۱۱)

نیز اگر ما = لا لوگ لا (۱۲)

تو عفا ما = لا عفا (لوگ لا) + ن عفا (لوگ لا)

$$= \frac{1-n}{1-n} + \frac{1-n}{1-n} \times \frac{2-n}{1-n} = \frac{2-n}{1-n}$$

ن-۱، ۲-ن، ۱-ن، ۲-ن، ۱-ن، ۲-ن، ۱-ن، ۲-ن کے مطابق

پس عفا ما = لا عفا (۱-ن) (۱۳)

مثال ۲۔ اگر ما = فو ع (۱۴)

$$\text{تو عفا ما} = \text{فو عفا} + \text{ن عفا} \times \text{فو عفا} + \frac{\text{ن (۱-ن) عفا فو عفا}}{2 \times 1} + \dots$$

$$= \text{فو عفا} + \text{ن عفا} + \frac{\text{ن (۱-ن) عفا فو عفا}}{2 \times 1} + \dots \dots \dots (۱۵)$$

پس اگر ما = فو جب ب لا (۱۶)

تو عفا ما = فو عفا (جب ب لا) + ۲ عفا جب ب لا + لا عفا جب ب لا

$$= \text{فو عفا} \{ \text{ب (۱-ن) جب ب لا} + ۲ ب جب ب لا \} \dots \dots \dots (۱۷)$$

اور یہ ضابطہ دفعہ ۲۴ (۱۶) کے مطابق ہے۔

۶۶۔ حرکیات کی مثالیں:- تفنی احصا کے حرکیاتی اطلاعات میں

دوسرا شتق خاص حصہ لیتا ہے۔ چنانچہ خطی حرکت کی صورت میں اگر ثابت مبدأ سے فاصلہ میں ہو تو دفعہ ۲۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ رفتار اس اور اسراع ع ذیل کے مضابطوں سے حاصل ہوئے ہیں

$$۱ = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \quad ۲ = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \quad (۱)$$

پس موجودہ ترقیم کے مطابق $۲ = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}}$ (۲)
یعنی بلحاظ وقت کے میں کا دوسرا شتق اسراع کی پیمائش کرتا ہے۔
نیز دفعہ ۲۶ کی ترقیم میں ثابت محور کے گرد ایک جسم کا زاوی اسراع ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} \quad (۳)$$

مثال ۱۔ اگر میں وقت کا دو درجی تفاعل ہو یعنی فرض کرو کہ

$$\text{میں} = ۱\text{ت} + ۲\text{ب} + ۳\text{ج} \quad (۴)$$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = ۲\text{ا} + \text{ب}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = ۲ \quad (۵)$$

یعنی اسراع مستقل ہے۔

مثال ۲۔ سادہ موسیقی حرکت میں

$$\text{میں} = ۱\text{جم} + (ن + صہ) \quad (۶)$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = -ن + \text{جب} (ن + صہ)$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = -ن + \text{جم} (ن + صہ) = -ن + \text{میں} \quad (۷)$$

یعنی اسراع ہمیشہ ایک ثابت نقطے (میں) کے مبدأ کی سمت میں کی طرف اور اس نقطہ سے

فاصلہ کے متناسب ہے۔

مثال ۳۔ اگر $س = (اجزئ ن ت + ب جزئ ن ت) \dots (۸)$

تو $\frac{فرس}{فرت} = ن (اجزئ ن ت + ب جزئ ن ت)$

اور $\frac{فرس}{فرت} = ن (اجزئ ن ت + ب جزئ ن ت) \dots (۹)$

یعنی اسرار ثابتہ نقطہ سے مخالف سمت میں ہے اور فاصلہ کے متناسب ہے۔

۶۔ تقعر اور متحد۔ نقاط انعطاف۔

جیسے فہ (۱۱) دفعہ ۲۶ کے مطابق فہ (۱۱) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے
ویسے ہی فہ (۱۱) بھی فہ (۱۱) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے۔ پس اگر
فہ (۱۱) مثبت ہے تو منفی

ما = فہ (۱۱) (۱)

کا ڈھال لا کے ساتھ بڑھ رہا ہے اور اگر فہ (۱۱) منفی ہے تو ڈھال لا کے
ساتھ گھٹ رہا ہے۔

اگر فہ (۱۱) = تو ڈھال کے بدلنے کی شرح ایک لمحہ کے لئے صفر ہے
اور یہاں ماس ساکن ہے اس کی سادہ مثال نقطہ انعطاف ہے یعنی وہ نقطہ
جس پر منحنی اپنے ماس کو عبور کرے (دیکھو شکل ۲۰)۔

جو نقطہ منحنی کو کسی نقطہ پر اوپر کی طرف تقعر اس وقت کہتے ہیں جبکہ منحنی کا وہ حصہ
اوپر کی طرف محدب کہتے ہیں جبکہ وہ کلیتہاً ماس کے نیچے واقع ہو۔

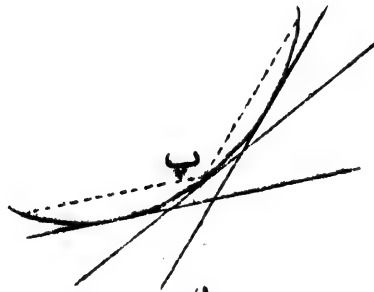
اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کی دائیں جانب ہے نقطہ پ کے ماس کے اوپر
واقع ہو (جیسے کہ شکل ۲۹ میں) تو دفعہ ۵۶ سے صاف ظاہر ہے کہ پ کے
دائیں جانب کی سمت میں (خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ ایسے نقطے
مل سکیں گے جن پر فہ (۱۱) کی قیمت نقطہ پ پر کی قیمت سے زیادہ ہو۔ پس

دفعہ ۴۸ کے مطابق نقطہ پ پر فہا (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔ اگر منفی کا وہ حصہ جو پ کے بائیں جانب ہے پ پر کے ماس کے اوپر واقع ہو تو بھی یہی نتیجہ قائم رہے گا۔

اسی طرح اگر منفی کے نقطہ پ کے دائیں یا بائیں جانب کا حصہ پ کے ماس کے نیچے واقع ہو تو فہا (لا) کی قیمت نقطہ پ پر مثبت نہیں ہو سکتی۔

پس اس بحث سے حاصل ہوا کہ منفی اوپر کی طرف متعسر ہو گا اگر فہا (لا) مثبت ہو اور اوپر کی طرف محدب ہو گا اگر فہا (لا) منفی ہو۔

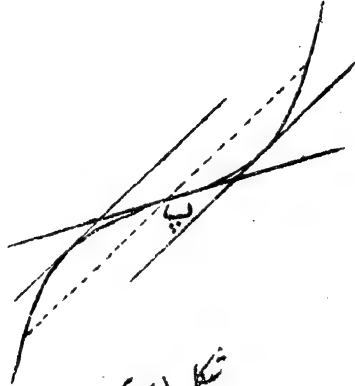
۱۴۷ نیز یہ ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر (جہاں منفی اپنے ماس کو عبور کرتا ہے) فہا (لا) مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی۔ اور چونکہ اس کو محدود فرض کر لیا گیا ہے اس لئے اس کا صفر ہونا لازمی ہے۔ یہ شرط اگرچہ ضروری ہے لیکن کافی نہیں۔



شکل (۳۹)

اس کے علاوہ یہ ضروری ہے کہ جب 'لا' کی قیمت بڑھتے بڑھتے زیر بحث قیمت میں سے گزرے تو فہا (لا) کی علامت بدلے۔ مثلاً فرض کرو کہ پ کے بائیں جانب منفی ماس کے نیچے ہے اور دائیں جانب اوپر ہے۔ دفعہ ۵۶ سے ظاہر ہے کہ منفی کے دائیں اور بائیں جانب پ کے قریب میں ایسے نقطے ہونگے جن پر ڈھال پ پر کے ڈھال سے بڑا ہے۔ یعنی ڈھال کی پ پر اقل قیمت ہے اور اس لئے دفعہ ۵ کے مطابق فہا (لا) کی علامت

منفی سے مثبت ہونی چاہئے۔



شکل (۴۰)

اگر منحنی ماس کو مذکورہ بالا سمت سے مخالف سمت میں عبور کرتا ہے تو پ پر
وہاں کی اعظم قیمت ہوگی اور فم (لا) کی علامت مثبت سے منفی ہوگی۔
مثال ۱۔ اگر $ما = لا^2$ (۲)

۱۴۸

تو $ما = ۲ لا$
جیسے لا کی قیمت صفر میں سے گزرتے ہوئے بڑھتی ہے ویسے ما کی قیمت
منفی سے مثبت ہوتی ہے اور اس لئے یہ نقطہ انعطاف ہے۔ شکل ۳ (صفحہ ۱۴۸)
دیکھو۔

مثال ۲۔ اگر $ما = \frac{لا^2}{لا + ۱}$ (۳)

$$تو \quad ما = \frac{لا(لا - ۳)}{لا^2 + ۱}$$

پس اس میں تین نقاط انعطاف ہیں یعنی جبکہ $لا = ۰$ اور $لا = ۳$ شکل ۳
(صفحہ ۲۰) دیکھو۔

مثال ۳۔ جب کے منحنی $ما = ب$ جب $\frac{لا}{۲}$ (۴)

کی صورت میں $\text{ما} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ جب $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ا}}$

پس ما علامت بدلتا ہے اس لئے وہ تمام نقاط جن پر منحنی لا محور کو کاٹتا ہے نقاط العطف ہیں دیکھو شکل ۱۴ (صفحہ ۴۲)۔

مثال ۴۔ منحنی $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ (۵) میں $\text{ما} = \frac{۱۲}{۱۲}$ نقطہ $\text{لا} =$ پر ما صفر ہو جاتا ہے لیکن اسکی علامت نہیں بدلتی۔ پس ساکن ماس تو ہے لیکن صحیح معنوں میں نقطہ العطف نہیں ہے۔ یہ اعلیٰ بات سے بھی ظاہر ہے کہ لا لازماً مثبت ہے اور یوں منحنی مبداء کے ماس کے ایک ہی جانب واقع ہوتا ہے۔

۶۸۔ اقل اور اعظم قیمتوں میں مشق کا استعمال۔

تفاعل فہ (لا) کی اقل اور اعظم قیمتوں میں امتیاز کرنے کی جابج جو دفعہ ۵۱ میں بیان کی گئی ہے وہ دوسرے مشتق فہ (لا) کے روم میں بھی بالعموم بیان ہو سکتی ہے۔

چونکہ فہ (لا) خود فہ (لا) کا مشتق ہے اس لئے ظاہر ہے کہ اگر فہ (لا) مثبت ہے جبکہ لا کی قیمت بڑھتے بڑھتے فہ (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرتی ہے تو فہ (لا) لازماً بڑھ رہا ہے اور اس لئے اسکی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ پس فہ (لا) اس مقام پر اقل ہے اسی طرح اگر فہ (لا) منفی ہے جبکہ فہ (لا) = تو لازماً فہ (لا) گھٹ رہا ہے اور اس لئے اس کی علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے۔ پس اس مقام پر فہ (لا) کی اعظم قیمت ہے۔

ان نتیجوں کا تقعر اور تحدب کے ساتھ ربط بالکل ظاہر ہے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ منحنی حرکت میں مبداء سے فاصلہ میں کی قیمت اقل یا اعظم ہوگی جبکہ رفتار $\frac{\text{فرس}}{\text{زمن}}$ صفر ہو اور اسلئے $\frac{\text{فرس}}{\text{زمن}}$ بالترتیب مثبت یا منفی ہو۔

مثال ۲ - فرض کرو کہ $f_m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$

تو دفعہ ۵ کی مثال میں دکھایا گیا ہے کہ $f_m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$ اور $\lambda = 1$ کے لئے صفر ہوتا ہے۔ نیز دفعہ ۶ کی مثال (۲) میں $f_m(\lambda)$ کی معلوم قیمت سے حاصل ہوتا ہے کہ

$f_m(1) = 1/2$ اور $f_m(1) = 1$

پس $\lambda = 1$ سے تفاعل $f_m(\lambda)$ کی اعظم قیمت حاصل ہوتی ہے اور $\lambda = 1$ سے اقل قیمت۔ دیکھو شکل ۱۳ (صفحہ ۴۰)۔

ایسا ممکن ہے کہ λ کی کوئی خاص قیمت جو $f_m(\lambda)$ کو صفر بناتی ہے $f_m(\lambda)$ کو بھی صفر بنا دے۔ ایسی صورت میں آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہاں پر بالعموم $f_m(\lambda)$ کی اقل اور اعظم قیمت نہیں ہوتی۔ دیکھو شکل ۳۱ (صفحہ ۱۲۸) لیکن یہاں اس پر بحث جاری رکھنا مفید نہ ہوگا۔ عام قاعدہ پندرھویں باب میں ٹیلر کے مسئلہ سے حاصل کیا جائیگا۔

۶۹ - مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات -

متواتر مشتق تفاعل مساواتوں کے نظریہ میں بڑا اہم حصہ رکھتے ہیں۔ دفعہ ۵۰ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ اگر $f_m(\lambda)$ منطق صحیح تفاعل ہو تو $f_m(\lambda) = 0$ کی کم از کم ایک اصل $f_m(\lambda) = 0$ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ضرور ہوگی۔ اسی طرح $f_m(\lambda) = 0$ کی کم از کم ایک اصل $f_m(\lambda) = 0$ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ہوگی۔ اور اسی طرح باقی مشتقوں کے لئے۔ نیز چونکہ $f_m(\lambda) = 0$ کی رتبہ کی اصل $f_m(\lambda) = 0$ کی (۱-۱) رتبہ کی اصل ہوگی اسلئے یہ $f_m(\lambda) = 0$ کی (۲-۲) رتبہ کی اصل ہوگی۔ اور اسی طرح وہ بالآخر $f_m^{(1)}(\lambda) = 0$ کی ایک رتبہ کی سادہ اصل ہوگی۔ پس $f_m(\lambda) = 0$ کی (۱-۱) رتبہ کی اصل ہونیکے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ تفاعل

فما (لا) فمّا (لا) فمّا (لا) فمّا (لا) (۱)
سب ایک ساتھ صفر ہوں -

مثال - اگر فمّا (لا) = ۲ + ۵ + ۷ + ۲ + ۲ + ۱ + ۱

تو فمّا (لا) = ۱۰ + ۲۰ + ۱۲ + ۴ + ۲ + ۲

اور فمّا (لا) = ۴۰ + ۶۰ + ۲۴ + ۲

یہ تینوں تفاعل لا = ۱ کے لئے صفر ہوتے ہیں، اس لئے یہ فمّا (لا) = کی
تیسرے رتبہ کی یا تہری اصل ہے حقیقت میں

فمّا (لا) = (۱ + ۱) (۲ + ۲) - (۱ + ۱)

۷۰ - دوسرے مشتق کی ہندی تعبیر -

دفعہ ۵۶ میں پہلے مشتق تفاعل کی ایک شہور خاصیت منحنی ما = فمّا (لا) (۱۰)
کو دراصل ایک سیدھے خط ما = ا + ج (۲) کے ساتھ مقابلہ
کرنے سے حاصل کی گئی تھی۔ اور مستقل ا اور ج اس شرط سے دریافت
کئے گئے تھے کہ (۱) اور (۲) ایک دوسرے کو لا کی دو معلومہ قیمتوں کیلئے
قطع کریں -

اسی طور پر منحنی (۱) کا مکافی ما = ا + ج (۳) + ج (۳) (۳)
کے ساتھ مقابلہ کرتے ہیں اور مستقالات ا + ج کو اس شرط کے تابع
معلوم کرتے ہیں کہ (۱) اور (۳) لا کی تین معلومہ قیمتوں کے لئے ایک دوسرے کو
قطع کریں -

(آ) پہلے ہم فرض کرتے ہیں کہ لا کی تین قیمتیں مساوی الفصل ہیں یعنی
۱ - ۵، ۱ - ۱، ۵ + ۵

اب مستقل دریافت کرنے کی مساوی ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} (۱) + \text{ج} (۱-ه) + \text{ج} (۱-ه) = \text{فما} (۱-ه) \\ (۲) + \text{ج} (۱-ه) + \text{ج} (۱-ه) = \text{فما} (۱) \\ (۳) + \text{ج} (۱-ه) + \text{ج} (۱-ه) = \text{فما} (۱+ه) \end{array} \right.$$

ایک نیا تفاعل فآ (لا) ایسا فرض کرو کہ

$$\text{فآ} (لا) = \text{فما} (لا) - (۱+ج + لا) (۲) \dots (۵)$$

یعنی فآ (لا) منہی (۱) اور (۳) کے معینوں کا فرق ہے۔ مفروض سے فآ (لا) صفر ہے جبکہ لا = ۱ - ھ اور لا = ۱ پس دفعہ ۴۹ سے شتق تفاعل فآ (لا) متغیر لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔

$$\text{یعنی فآ} (۱-طہ + ھ) = ۰ \dots (۶)$$

جہاں $۰ < طہ < ۱$ ۔ نیز چونکہ فآ (لا) صفر ہے لا = ۱ اور لا = ۱+ھ کے لئے اس لئے

$$\text{فآ} (۱+طہ + ھ) = ۰ \dots (۷)$$

جہاں $۰ < طہ < ۱$ ۔ اس دلیل کو دوبارہ استعمال کرنے سے چونکہ فآ (لا) صفر ہے جبکہ لا = ۱ - طہ اور لا = ۱ + طہ + ھ اس لئے اس کا مشتق تفاعل فآ (لا) بھی لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ یعنی

$$\text{فما} (۱+طہ + ھ) = ۰ \dots (۸)$$

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو کسور۔ طہ اور طہ کے درمیان واقع ہے اور اس لئے ضروری طور پر ± ۱ کے درمیان ہے۔

$$\text{چونکہ ضابطہ (۵) سے فآ} (لا) = \text{فما} (لا) - ۲ \text{ ج} \dots (۹)$$

اس سے ثابت ہوا کہ طہ کی ± ۱ کے درمیان کسی خاص قیمت کے لئے

$$\text{فما} (۱+طہ + ھ) = ۲ \text{ ج} \dots (۱۰)$$

اب (۴) کے ضابطوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$151 \quad f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(2)} \quad \text{ج ۲} \quad \dots \dots (11)$$

اور اسلئے
$$f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(2)} \quad \text{ج ۲} \quad \dots \dots (12)$$

پس نہی
$$f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(2)} \quad \text{ج ۲} \quad \dots \dots (13)$$

اسی طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں

نہی
$$f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(2)} \quad \text{ج ۲} \quad \dots \dots (14)$$

اگر فرق $f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)}$ کو مف ما سے ظاہر کیا جائے تو

$$\{f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)}\} - \{f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)}\} = \{f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)}\}$$

متبوع متغیر کے مساوی اضافوں ہ کے لئے فرقوں کا فرق یعنی دوسرے فرق

مف (مف ما) یا مف ما سے ظاہر کیا جاسکتا ہے -

پس ضابطہ (۱۴) ضابطہ ذیل کے معادل ہے

نہی
$$f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)} = f_{(2)} \quad \text{ج ۲} \quad \dots \dots (15)$$

ترتیم $f_{(1)} + f_{(2)} - f_{(1)}$ کی یہی وجہ تھی کیونکہ یہ دوسرے فرق کی انتہائی شکل ہے -

مسئلہ (۱۳) کی ہندی تعبیر دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ شکل (۱۴) میں

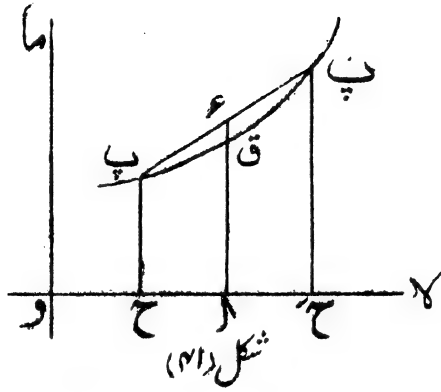
$$1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, 6 = 6, 7 = 7, 8 = 8, 9 = 9, 10 = 10$$

اور ا ق ح پ اور ح پ کے منحنی (۱) کے ان نقاط پر بالترتیب معین

پ پ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ا ق خط پ پ سے نقطہ پ پر ملتا ہے -

$$1 = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$1 = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$



اور اس لئے $ع ق = ا ع - ق ا$

۱۵۲

$\frac{1}{4} \{ ف ا (ا + ہ) - ۲ ف ا (ا) + ف ا (ا - ہ) \} =$
اب ضابطہ (۱۳) اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ انتہا میں

$$ع ق = \frac{1}{4} (ح ا) \times ف ا (ا) \dots \dots (۱۶)$$

اس سے ظاہر ہے کہ وتر کا قوس کے اوپر یا نیچے ہونا ف ا (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ منحنی (۱) اور (۳) کے تین نقاط تقاطع میں سے دو ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، یعنی ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ $ا = ہ$ کے لئے دو منحنی ایک دوسرے کو نہ صرف کاٹتے ہیں بلکہ لمس کرتے ہیں اور نقطہ $ا = ہ$ پر وہ ایک دوسرے کو پھر کاٹتے ہیں۔

نقطہ $ا = ہ$ پر دونوں منحنیوں کے لئے ما اور لا کی ایک ہی قیمت ہونے کے لئے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} ا + ج ا = ف ا (ا) \\ ج ا + ا = ف ا (ا) \end{array} \right. \dots \dots (۱۷)$$

اور تیسری شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ا + ج = (ا + ۱) + (۱ + ۵) = ۲(۵ + ۱) = ۲(۱ + ۵) = ۲(۱۸) \dots$$

اگر فا (لا) سے وہی تغافل تعبیر ہو جس کا اوپر بیان ہوا تو

$$فا (ا) = ۰ \text{ اور } فا (۱ + ۵) = ۰ \dots (۱۹)$$

$$\text{اور اس لئے } فا (ا + ط + ۵) = ۰ \dots (۲۰)$$

جہاں $ا > ط$ ، صفر ہے لا = ا اور لا = (ا + ط + ۵) کے لئے اسلئے
نیز چونکہ فا (لا) صفر ہے لا = ا اور لا = (ا + ط + ۵) کے لئے اسلئے

$$فا (ا + ط + ۵) = ۰ \dots (۲۱)$$

جہاں $ط > ا$ ۔

اب ضابطے (۱۷) اور (۱۸) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$فا (ا + ۵) - فا (ا) - فا (۱) = ج ۵ \dots (۲۲)$$

پس (۹) اور (۲۱) سے

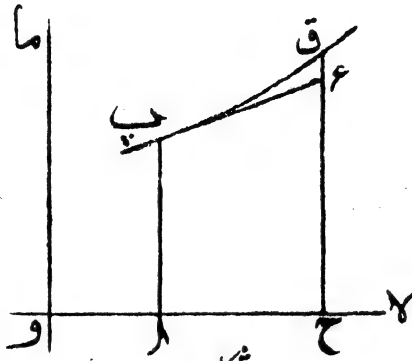
$$فا (ا + ۵) = فا (ا) + فا (۱) + \frac{۱}{۲} فا (ا + ط + ۵) \dots (۲۳)$$

نتیجہ نہایت اہم ہے اور بعد ازاں معلوم ہوگا کہ یہ سارے مسئلہ کی لگائی شکل کی خاص صورت ہے (دیکھو پندرہواں باب) اس شکل میں مسئلہ کا صرف اتنا حصہ شریک ہے جسکی بالعموم حرکیاتی اور طبیعیاتی سوالات میں اکثر ضرورت پڑتی ہے۔
نتیجہ (۲۳) سے اخذ ہوتا ہے

$$فا (ا + ۵) - فا (ا) - فا (۱) = \frac{۱}{۲} فا (ا) \dots (۲۴)$$

شکل ۲۲ میں فرض کرو کہ $ا = ۱$ اور $ا = ح = ۵$ اور اپ 'ح' ق
بالترتیب ان نقاط کے معین ہیں۔ اگر ق ح نقطہ پ پر کے ماس کو
پر لئے تو

$$ق = ح = فا (ا + ۵) = فا (۱) + فا (۵)$$



شکل (۳۲)

پس ضابطہ (۲۴) اس بات کی صداقت کا اظہار کرتا ہے کہ انتہائیں
 $ق = ع = \frac{1}{4} (ا ح) \times فئا (ا) \dots\dots\dots (۲۵)$
 پس نقطہ تماس کے قریب میں ماس سے منحنی کا ہٹاؤ عموماً دوسرے رتبہ کی چھوٹی
 مقدار ہوتا ہے۔ اگر فئا (ا) = ۱۰ تو ق ع کی علامت ۱۰ کے ساتھ
 نہیں بدلتی اور ج کے عین قریب میں منحنی کا کلیتاً ماس کے اوپر یا نیچے واقع ہونا
 فئا (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہوگا۔ دیکھو دفعہ ۶۷
 انٹھا کے نظریہ میں ضابطوں (۱۶) اور (۲۵) کا دلچسپ استعمال ہے۔ دیکھو
 رسواں باب۔

۱۔ اجزائے متناسب کا نظریہ۔

فرض کرو کہ منحنی $ما = فئا (لا) \dots\dots\dots (۱)$
 اور مکانی $ما = (ا + ب لا + ج لا^۲) \dots\dots\dots (۲)$
 نقاط $لا = ا$ ، $لا = ا + ب$ ، $لا = ا + ب + ج$ پر قطع کرتے ہیں جہاں $ا < ب < ج$ ۔
 ہم معلوم کرتے ہیں
 $(ا-ب) فئا (ا) + (ب-ا) فئا (ا + ب) - فئا (ا + ب) = (ب-ا) فئا (ا) + (ج-ا) فئا (ا + ب) \dots\dots (۳)$
 اور اس لئے دفعہ سابق کے طریقہ کے مطابق

(۱-ی) فہ (۱) + ی فہ (۱+ھ) - فہ (۱+ی) ھ = ۱ (۱-ی) ھ فہ (۱+ھ) (۱+ی) ھ
(۴).....

جہاں $\frac{۱}{۱+ھ}$ -
دفعہ ۱۰ کے مسائل اس ضابطہ کی خاص صورتیں ہیں اور اسے یہاں اس لئے بیان کیا گیا ہے کہ اس کا متناسب اجزاء کے نظریہ سے خاص تعلق ہے۔ فرض کر دو کہ تفاعل فہ (۱) کی قیمتیں (۱) کی متعدد قیمتوں کے لئے (جو ایک دوسرے سے مساوی فرق ھ پر ہیں) جدول کی شکل میں درج کی گئی ہیں۔ فرض کر دو کہ (۱) کی ان قیمتوں میں سے ایک قیمت ۱ ہے اور فہ (۱) کی قیمت مطلوب ہے جبکہ (۱) ۱ اور متصل جدولی قیمت ۱+ھ کے درمیان کسی واقع ہو مثلاً ۱+ھ = ۱+ی رہے جہاں $\frac{۱}{۱+ھ}$ -۔ اب متناسب اجزاء کے طریقے میں اور ان یہ فرض کر کے کیا جاتا ہے کہ تفاعل (۱) سے (۱) = ۱+ھ تک یکساں طور پر بڑھتا ہے یعنی

$$\frac{\text{فہ (۱+ی) ھ} - \text{فہ (۱) ھ}}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ ی}$$

یا فہ (۱+ی) ھ = (۱-ی) فہ (۱) + ی فہ (۱+ھ) (۱)..... (۶)
اس عمل میں یہ فرض کر لیا جائے کہ (۱) = ۱ اور (۱) = ۱+ھ کے درمیان منحنی (۱) کی قوس کی بجائے درجے کے لئے سے قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔ ضابطہ (۴) سے اس مفروض کی خطا حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۱ مثال ۲ سے ظاہر ہے کہ (۱-ی) کی اعظم قیمت $\frac{۱}{۱+ھ}$ ہے۔ پس اگر حدود (۱) ۱ اور (۱) = ۱+ھ کے درمیان فہ (۱) کی بڑی سے بڑی قیمت ۱ سے ظاہر کریں تو ضابطہ (۴) سے ثابت ہوتا ہے کہ خطا $\frac{۱}{۱+ھ}$ سے (۷)
مثال ۱ - سات اعشاریہ لوگارتھی جدول میں ۱۰۰۰۰ سے تک ایک ایک کے وقفہ پر تمام صحیح عددوں کے لوگارتھ درج ہیں۔ اب اگر
فہ (۱) = لوگ ۱ (۸)

$$\text{تو فہ (۱) = } \frac{۱}{۱+ھ} \text{ (۹)}$$

پس (۷) میں ۵ = ۱ رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لوگ پ ن اور لوگ پ (ن+۱) کے درمیان متناسب اجزاء کے طریقہ سے اور ارج کرنے میں جو خطا نرہ ہوتی ہے وہ $\frac{5.549}{25} \dots \dots \dots (10)$

سے بڑی نہیں ہے اس لئے اگر ن = ۱۰۰۰ تو بڑی سے بڑی خطا ۵۴۳ ۵ سے زیادہ نہیں ہے اور سات اعشاریہ تک کے جدول کے لئے یہ بالکل نظر انداز کی جاسکتی ہے نیز (۴) سے ظاہر ہے کہ جب کبھی فم (لا) کی قیمت بڑی ہو تو اس طریقہ صحیح نتیجہ حاصل ہوگی انہیں اس وقت کہا جاتا ہے کہ فرق بے قاعدہ ہیں۔

مثال ۲۔ اگر فم (لا) = لوگ جب لا (۱۱)
تو فم (لا) = - مہ قم لا (۱۲)

پس ۵ = $\frac{\pi}{1.08} = 2.91 \dots$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

۱۔ ۵ فم (لا) = -۴۶ ۴۶ قم لا (۱۳)
چونکہ قم ۱۸ = ۱.۰۶۷ اس لئے ظاہر ہے کہ آ کے وقفہ والے لوگ ارتقی جیب کے جدول میں اور ارج کی خطا جبکہ زاویہ ۱۸ سے کم ہے اعشاریہ کے ساتویں مقام میں زیادہ سے زیادہ نصف اکائی کی ہو سکتی ہے۔

مثال ۲۱

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

$$(1) \text{ مہ} = \text{لا} (1) - \text{لا} (2) \quad \text{عفا مہ} = 2 - 12 \text{ لا} + 12 \text{ لا}^2$$

$$(2) \text{ مہ} = \frac{1}{2} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{2} \text{ مہ لا} (2) \quad \text{عفا مہ} = \text{مہ لا} - \text{لا}$$

$$(3) \text{ مہ} = \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (2) + \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (3) \quad \text{عفا مہ} = \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (2) + \frac{1}{3} \text{ مہ لا} (3)$$

$$(4) \text{ مہ} = \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (2) + \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (3) - \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (4) \quad \text{عفا مہ} = \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (2) + \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (3) - \frac{1}{4} \text{ مہ لا} (4)$$

$$(5) \text{ مہ} = \frac{1}{5} \text{ مہ لا} (1) - \frac{1}{5} \text{ مہ لا} (2) + \frac{1}{5} \text{ مہ لا} (3) - \frac{1}{5} \text{ مہ لا} (4) + \frac{1}{5} \text{ مہ لا} (5) \quad \text{عفا مہ} = \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{2(1+\text{لا})} - \frac{1}{2(2-\text{لا})} \right\}$$

۱۵۴

(۳۱) اگر ما = $\{ (۱ + \sqrt{۲}) + (۱ + \sqrt{۲}) \}$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱ + \sqrt{۲}) \left(\frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}} + \frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}} \right) = ۲$$

(۳۲) اگر لا = فم (ت) ' ما = خم (ت) تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}}}{\frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}}} - \frac{\frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}}}{\frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}}} = \frac{۲}{۱ + \sqrt{۲}}$$

امثلہ ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ طبعی جیوب کی جدول میں جو آ کے وقفوں پر مرتب کی گئی ہو متناسب اجزاء کی خطا ۱.۶..... سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی۔

(۲) ثابت کرو کہ طبعی ماس کی جدول میں ۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے متناسب اجزاء کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ نیز دکھاؤ کہ ۵۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے اگر ماس آ کے وقفوں پر دئے ہوئے ہوں تو خطا کی حد ۲۲۳..... ہے۔

(۳) دکھاؤ کہ لوکارٹی ماسوں کی جدول میں متناسب اجزاء کا قاعدہ ۱۰ اور ۹۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے ناکام رہتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تفاعل کے لئے متناسب اجزاء کے قاعدہ میں بڑی سے بڑی خطا ۵۰ کے قریب کے زاویوں کے لئے کم سے کم ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ منحنی ما = لوگ لا ہر جگہ اوپر کی طرف محدب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ منحنی ما = لا لوگ لا ہر جگہ اوپر کی طرف مقعر ہے نیز اسکی تریسم کھینچو۔

(۶) منحنی ما = لا ہو لا کا اعظم معین اور نقطہ انعطاف دریافت کرو۔

نیز اسکی تریسم بھی کھینچو۔ [اعظم معین فاصلہ لا = آ کے جواب میں اور نقطہ انعطاف

لا = ۲ کے جواب میں ہے۔]

(۷) دکھاؤ کہ منحنی ما = فو لا میں ایسے نقطوں پر انعطاف ہے جسکے لئے لا = $\frac{۱}{۲}$

اس کی ترسیم کیجیو۔
(۸) منحنی $\text{ما} = \text{لا} \text{قولا}$ کے اعظم اور اقل معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور اس کی ترسیم کیجیو۔

[$\text{لا} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ سے اعظم اور اقل معین حاصل ہوتے ہیں اور $\text{لا} = 0$ سے $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ سے نقاط انعطاف]

(۹) فاصل $\text{فما} (\text{لا})$ مستقل ہے اور $\frac{1}{\sqrt{2}} = (\text{ب}^2 - \text{ا}^2)$ جبکہ $0 < \text{لا} < 1$
نیز $\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{ب}^2 - \frac{1}{4} - \text{لا}^2 = \frac{1}{4} - \frac{\text{ا}^2}{4}$ جبکہ $1 > \text{لا} > \text{ب}$

اور $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{لا}}$ جبکہ $\text{لا} < \text{ب}$
ثابت کرو کہ $\text{فما} (\text{لا})$ 'فما' (لا) مسلسل ہیں لیکن $\text{فما} (\text{لا})$ غیر مسلسل ہے۔
منحنی $\text{ما} = \text{فما} (\text{لا})$ کی ترسیم کیجیو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ $\text{ما} = \text{لا}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$ میں نقطہ (۲، ۱) پر نقطہ انعطاف ہے۔
منحنی کو ترسیم کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^2 (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)$ کے نقاط $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ پر انعطاف ہے۔
منحنی کو ترسیم کرو۔

(۱۲) منحنی $\text{ما} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ کے نقاط انعطاف دریافت کرو [$\text{لا} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$]

(۱۳) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2 + (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}$ پر $(-1, \frac{2}{3})$ نقطہ انعطاف ہے۔
منحنی کی ترسیم کیجیو۔

(۱۴) منحنی $\text{ما} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ کی ترسیم کیجیو اور اس کے نقاط انعطاف

دریافت کرو۔ [لاؤ، لےو اور]

(۱۵) ثنابت کرد کہ مخفی ما = $\frac{1}{1+1}$ پرتین نقاط العطف میں اور وہ ایک خط میں واقع ہیں، 'منہی کی ترکیب کھینچو۔'

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ + لا - ۶ = ۰$ کی ایک تہری اصل ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $۵x^۵ + ۵x^۴ + ۹x^۳ - ۱۴x^۲ - ۸x + ۳ = ۰$ کی ایک
تہری اصل ہے نیز تمام اصلیں دریافت کرو۔

(۱۸) تخفی ما = ۱ - ۳ (۲ + ۲) کو مرسم کرو اور اسکے اقل اور اعظم معین اور نقاط العطف سے دریافت کرو۔

(۱۹) شخصی ۶ = ۲ لا ۳ - لا ۳ + لا ۲ کو مرسم کرو اور اس کے نقط الخطاف دریافت کرو۔

(۲۰) منحنی $MA = ۴(۱ + ۲۹ + ۶ + ۱)$ کے اقل اور عظم معین اور نقاط انعطاف
دریافت کرو اور منحنی کو رسم کرو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ منحنی $6 = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2$

ہیں اور نقطہ تماس پر عمود کرتے ہیں۔ سفینوں کو دھکم کر دے۔

(۲۲) دریافت کرد کہ مستقامات (ج) سچ کی کیا قیمت ہونی چاہئے کہ مخفی
 ماس = (لا + ج) لا پر لا = $\frac{1}{4}$ نقطہ انعطاف ہو (لا) = ۱۰۰ پر مخفی کا
 ماس لا محور کے متوازی ہو اور مخفی نقطہ (۱، ۱۳) میں سے گزرے۔

(۲۳) ثابت کر دکھائی جائے کہ $\frac{(1-y) - (1+y)}{(1+y) + (1-y)}$ پرتین حقیقی نقاط انگطاف ہیں۔

(۲۴) منحنی $MA = MB$ جب MA جب MB پر موڑ کے نقطے اور نقاط انعطاف دریا اور منحنی کو ملے کر دو۔

(۲۵) اگر غنی ما = فقیر (۱۶) کے متصل میں پ ن پ ن ہوں اور اگر

ق ح کوئی درمیانی معین ہو جو درجہ پ سے و پر لے ترتیب کرکے انتہائیں

$$ق و = \frac{1}{4} ن ح \times ح ن \times ف ص (ج)$$

جہاں ن اور و کے کسی درمیانی نقطہ کا فاصلہ ج ہے۔

(۲۶) ثابت کرکے دفعہ ۵۶ کے ضابطہ ف ص (و + ہ) = ف ص (و) + ہ ف ص (و + ط ط ہ) میں ط ہ کی انتہائی قیمت (جیکہ ہ لا انتہا چھوٹا ہو) عموماً $\frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔ اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر تباؤ۔

(۲۷) ثابت کرکے اقل اور اعظم نقطا کی قربت میں تفاعل کی قیمت میں تغیر اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔

(۲۸) تباؤ کو کیوں کسی خاص تیش پر متلائی کرو نو میٹر کی چال 'ٹھیک' تلافی پیدا کرنے والی معیاری تیش پر کی چال سے بقدر ایک ایسی مقدار کے مختلف ہوتی ہے جو تیش کے فرق کے مربع کے متناسب ہے۔

(۲۹) ثابت کرکے تغیر کے مساوی قوتوں کے لئے محسوس کردہ ریاضی کی جدول کے کسی حصے میں متناسب اجزاء کے اصول پر اور ان کرنے میں بڑی سے بڑی خطا دوسرے فرق کے اٹھویں حصہ کے مساوی ہے۔ (دوسرے فرق سے مراد مسلسل داخلوں کے فرقوں کا فرق ہے)۔

(۳۰) ایک نئی پست ترین نقطہ لوکس 'ق' اس کے محدود بالترتیب (۵۸۵۲۶، ۵۳۲۵۰، ۵۸۵۲۶، ۵۳۵۰۰، ۵۸۹۱۰، ۵۳۴۵۰، ۵۹۲۳۹) میں نقطہ ق پر $\frac{ق}{ق+۱}$ اور $\frac{ق}{ق-۱}$

کی قیمتیں تقریباً دریافت کرو۔

(۳۱) دفعہ ۷۰ کے ضابطہ ۲۳ کی مدد سے لوکس 'ج' کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک دریافت کرو۔ [T ۹۹۹۹۳۴]

فہرست اصطلاحات

صغاری احصاء

(حصہ اول)

Abscissa

Absolute value

Acceleration

Adiabatic relation

Amplitude

Anti-logarithm

Approximation

Arc

Asymptotes

Calculus

Catenary

Cartesian co-ordinates

Chord

Circular Functions

Circumscribed circle

Compression

Cone

فصلہ
مطلق قیمت

اسراع

حرکت گذار رشتہ

سعت

ضد لوگاریتم

تقرب

قوس

متقارب

احصاء

زنجیرہ

کارٹیزی مختد

وتر

دائری تفاعل

بیرونی یا داخلہ دائرہ

پچکاؤ

مخروط

Consecutive point

متصل نقطه

Continuity

تسلسل

Convergency

استدقاق

Convergent (Series)

مستندق سلسله

Crank

کرنیک

Cross-section

عمودی تراش

Curvature

انحناء

Curve

منحنی

Cylinder

اسطوانه

Deflexion

انحراف

Density

کثافت

Dependent variable

تابع متغیر

Derived function

مشتق تفاعل

Differentiable

قابل تفریق

Differentials

تفریق

Differentiation

تفریق

Discontinuity

عدم متصل

Double root

دو بری اصل

Dynamics

حرکات

Elasticity

لیج

Elimination

استقاط

Ellipse

قطع ناقص

Ellipsoid

ناقص نما

Exponential function

قوت نا تفاعل

Frustum

ناکمل یا ناقص حصه، مقطوع

Function	تفاعل
Galvanometer	مقناطیسی برقی پیمانہ
Geometrical progression	سلسلہ ہندسیہ
Graph	نقشہ
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hyperboloid	زائد نما
Image	خیال
Implicit function	تضمینی تفاعل
Inclination	میلان
Independent variable	متغیر متبوع
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinitesimal	صغاری، صغاریہ
Intercept	تقاطع یا مابینی حصہ
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Isolated points	تنہا یا انکیلے نقطے
Kinetic energy	توانائی بالحرکت
Lens	عدسہ
Limit	انتہا
Limiting values	انتہائی قیمتیں
Logarithm	لوکارتم
Logarithmic function	لوکارتمی تفاعل

Longitudinal magnification

Lower limit

Magnification

Maximum

Mean-value Theorem

Mechanics

Multiple roots

Node

Normal

Order

Ordinate

Oscillation

Parabola

Paraboloid

Parallelopiped

Parameter

Partial

Perimeter

Pendulum

Period

Permutation

Polar Co-ordinates

Pole

Pressure

Principal axes

طولی تضعیف
نیلی انتہا، نیچے کی حد

تضعیف

اعظم

اوسط قیمت کا مسئلہ

علم حیل

ضعفی اصلیں

عقدہ

عماد

رتبہ

معتین

اہتزاز

قطع مکانی

مکانی نما

متوازی السطوح

مبدل

جزوی

گھیرا، محیط

رقاص

دور

ترتیب

قطبی نحد

قطب

دباؤ

صدری محور

Radius Victor	سستی نیم قطر
Range	وسعت، پیم
Rational	منطوق
Rectilinear motion	مستقیم حرکت
Representation	تعبیر
Rigid body	استوار جسم
Rigidity	استواریت
Roots	اصلیں
Sequence	تواتر
Sphere	کرہ
Spheroid	کرہ نما
Theory	نظریہ
Transcendental	ماورائی
Trigonometry	علم مثلث
Unique	یگانہ
Upper limit	علوی انتہا، اوپر کی حد
Variable	تغیر
Variation	تغیر
Vector	سستی
Vertical	انتصابی
Zone.	منطقہ

ترتیم

(NOTATION)

Sin ∞	جب لا
Cos ∞	جم لا
tan ∞	مس لا
cot ∞	مم لا
Sec ∞	قط لا
Cosec ∞	قم لا
Sin ⁻¹ ∞, Cos ⁻¹ ∞, tan ⁻¹ ∞,	جب ⁻¹ لا، جم ⁻¹ لا، مس ⁻¹ لا
Cot ⁻¹ ∞, Sec ⁻¹ ∞, Cosec ⁻¹ ∞,	مم ⁻¹ لا، قط ⁻¹ لا، قم ⁻¹ لا
Sine hyperbolic (Sinh ∞)	زائدی جیب (جبن لا)
Sinh ∞, Cosh ∞, Tanh ∞,	جبن لا، جمن لا، مسن لا
Coth ∞, Sech ∞, Cosech ∞,	منن لا، قطن لا، قمن لا
Sinh ⁻¹ ∞, Cosh ⁻¹ ∞, Tanh ⁻¹ ∞,	جبن ⁻¹ لا، جمن ⁻¹ لا، مسن ⁻¹ لا
Coth ⁻¹ ∞, Sech ⁻¹ ∞, Cosech ⁻¹ ∞,	منن ⁻¹ لا، قطن ⁻¹ لا، قمن ⁻¹ لا
π	π
Exponent (e)	توت نام (قو) یا صرف (مو)
e ∞	قو لا
a ∞	ا لا
log _e ∞	لوگ لا [یا صرف لوگ لا]
log ₁₀ ∞	لوگ لا
€	سہ یا صہ

انتہا، ∞

نہا فارلا = ۱

فرقی دفر

تفرقی سر (فرما)

فرما، فرما، فرما
فرما، فرما، فرما

مفلا، مفما، مفی
فرلا، فرما، فری

فَ (لا) فَ (لا) ...

عائلہ تفرق و عاف

عَفَا مَا عَفَا مَا.....

“6” “6” “6”

جزوی تفرقی سر جف $\frac{dy}{dx}$

جفّا, جفّاً, جفّى ,
جفّ لا جفّاً جفّ لا جفّاً

فرداد

(11) 6

فما (لا) ٤

اشاریہ (INDEX.)

احداثیات متعلقہ

اتفاق یا مشروط استفاق ' ۱۶

اجزائے متناسب ' ۲۱۲

اجزائے متناسب کے ذریعہ اوراج ' ۲۱۳

استفاق ' لامتناہی سلسلوں کا ' ۹، ۸

اصلیں ' جبریہ مساواتوں کی ' ۱۴

اعظم اور اقل قیمتیں ' ۱۴۳

انتہائی قیمتیں ' ۱۰، ۵، ۴

انعطاف کے نقاط ' ۸

اوسط قیمت کا مسئلہ ' ۱۵۶

تصویحات کا محسوب کرنا ' ۱۵۴

تضمینی تفاعل ' ۹۲ تا ۹۴، ۱۶۵

تغیر ' ۲، ۱

تفاعل ' تعریف ' ۲۰

ہندی تعریف ' ۲۲

جبری اور مادرانی ' ۳۴

تضمینی ' ۹۲

مقلوب ' ۴۲، ۸۵

- تفاعل کا پورا تغیر ۱۵۹
تفرق ۸۲، ۸۰، ۷۷، ۷۶، ۷۳، ۷۰، ۶۷، ۶۴، ۶۱، ۵۸، ۵۵، ۵۲، ۴۹، ۴۶، ۴۳، ۴۰، ۳۷، ۳۴، ۳۱، ۲۸، ۲۵، ۲۲، ۱۹، ۱۶، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴، ۱
- تفرق ۹۳، ۸۵
تفرق ۱۶۲، ۱۵۳
تقعور اور تحدب ۲۰۲
ٹیل کا مسئلہ ۲۱۱
جبری تفاعل کا تسلسل ۳۷، ۳۴، ۳۱، ۲۸، ۲۵، ۲۲، ۱۹، ۱۶، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴، ۱
جزوی مشتقات ۹۱
جفت اور طاق تفاعل ۱۱۳
دائرہ کا محیط ۴۶
دائری تفاعل ۸۱، ۷۷، ۷۴، ۷۱، ۶۸، ۶۵، ۶۲، ۵۹، ۵۶، ۵۳، ۵۰، ۴۷، ۴۴، ۴۱، ۳۸، ۳۵، ۳۲، ۲۹، ۲۶، ۲۳، ۲۰، ۱۷، ۱۴، ۱۱، ۸، ۵، ۲، ۱
دوسرا مشتق ۱۹۵
اسکی ہندی تغیر ۲۰۷
رول کا مسئلہ ۱۴۰
زائدی تفاعل ۱۱۲ تا ۱۱۷
زیر عماد ۱۶۷
زیر عباس ۱۶۷
ساکن قیمتیں، تفاعلوں کی ۱۴۵
ساکن عباس ۲۰۲
صغاریات ۵۷
ضعفی اصلیں، مساواتوں کی ۲۰۶
عدم تسلسل ۲۹
علوی یا سفلی آہٹا، گردہ کی ۳
عماد کی مساوات ۱۷۱
قوت نما تفاعل ۱۱۰، ۱۰۳

- قیمت ، فوکی ، ۱۱۲
 لامتناہی سلسلے ، ۱۵۷
 لوکاریم کا تفرق ، ۱۲۲
 لوکاریمی تفاعل ، ۱۱۷
 لیپ نیز کا مسئلہ ، ۱۹۸
 ماورائی تفاعل ، ۳۴
 متغیر ، متبوع اور تابع ، ۲۰
 مساواتوں کا نظریہ ، ۱۳۰ ، ۲۰۶
 مسلسل تفاعل ، تعریف ، ۲۴
 خاصیت ، ۲۵ ، ۴۷
 مسلسل تغیر ، ۱
 مشتق تفاعل ، تعریف ، ۶۸
 ہندسی توضیحات ، ۶۶
 مقلوب تفاعل ، ۴۲ ، ۸۵
 مقلوب دائری تفاعل ، ۴۴ ، ۸۶ تا ۸۹
 ماس ، منحنی کا ، ۶۷ ، ۱۷۰
 منحنی کا ڈھال ، ۶۷
 منطق صحیح تفاعل ، ۳۴
 منطق کسر ، تریسٹیم ، ۳۶
 نظریہ ، مساواتوں کا ، ۱۴۰
 نقشی باہم ارتفاع خطوط ، ۹۳
 ہندسی تعبیر ، مقداروں کی ، ۲
 تفاعل کی ، ۲۲

آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار ^{لیا}
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرا نہ لیا جائے گا۔

الحمد لله

طائفہ علمائے اسلامیہ

[illegible]

